استجابة جملة وحيدة درجة الحرية غير مخمدة لحمولة نبضية

response of undamped SDOF system to impulsive loading
باستعمال تكامل دوهاميل

Lecture 10

dr. Hala Hasan
dr.hala61@gmail.com

تعريف الاحمال النبضية

الاحمال النبضية impulsive loading:

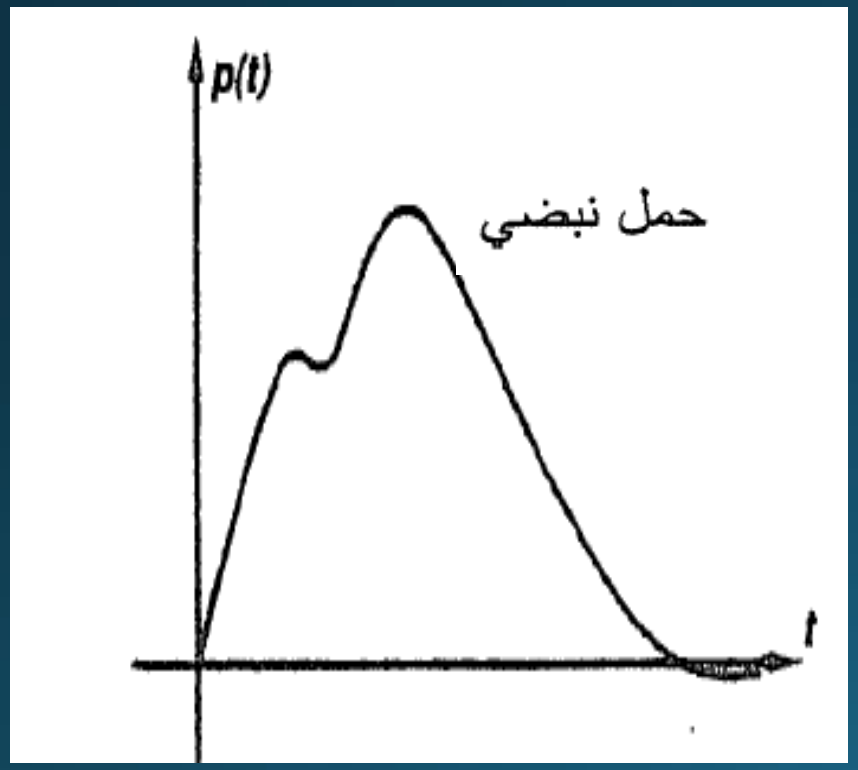
هي احمال ذات قيمة كبيرة مطبقةخلال فترة زمنية قصيرة.

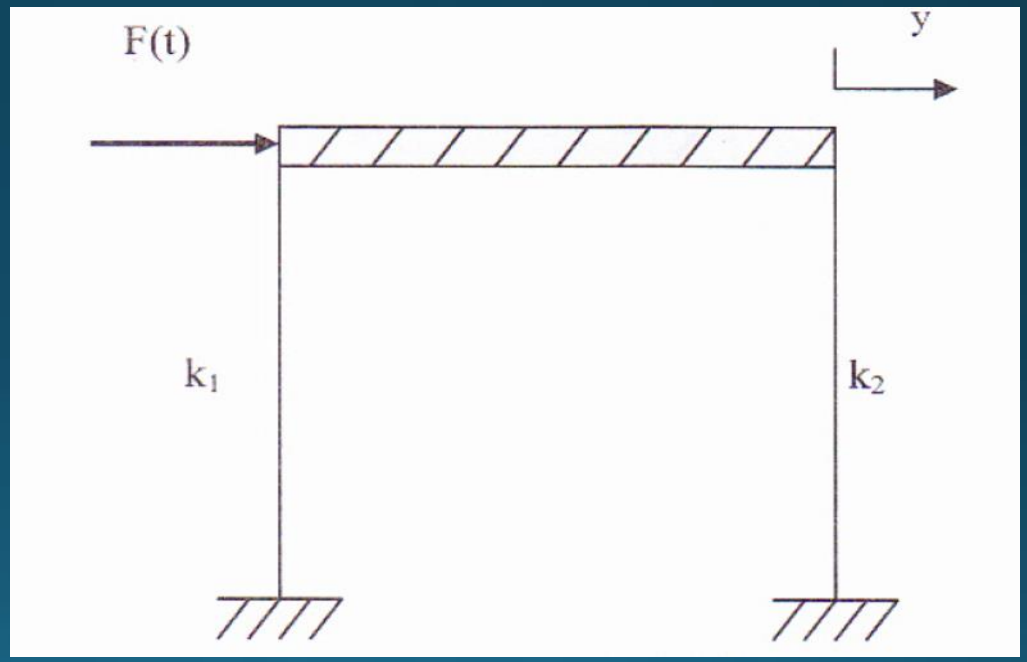
معظم الاحمال الديناميكية المطبقة على المنشات هي احمال غير دورية وانما هي احمال عامة وقد تكون عشوائية في معظم الحالات كالانفجارات والهزات الارضية وهي في تزايد في الفترات الاخيرة ، والاحمال النبضية هي احدى هذه الحالات impulsive loading

تعتبر الاحمال النبضية من الاحمال المهمة حيث يمكن ان تمثل في الحياةمعظم انواع الصدمات والاحمال الديناميكية المطبقة بشكل مفاجئ على المنشات ، ويمكن تمثيل هزة ارضية ما بمجموعة احمال نبضية تؤثر بالمنشا بشكل متلاحق .

استجابة جملة وحيدة درجة الحريةغير مخمدة لحمولة نبضية
response of undamped SDOF system to impulsive loading

الاطار التالي يخضع الى حمل ديناميكي عام وهو عبارة عن حمل نبضي عشوائي خلا ل مدة زمنية محددة كما هو مبين في الشكل





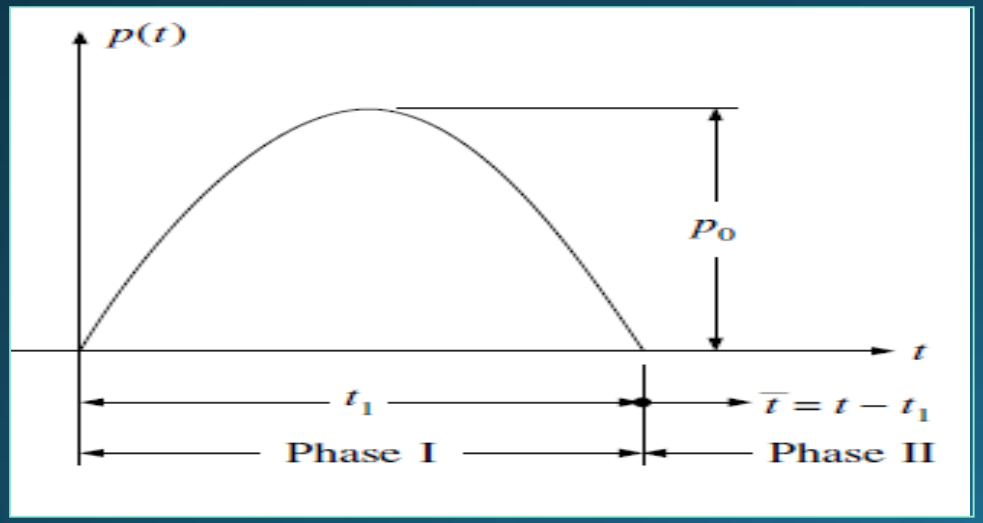
إطار معرض لحمل ديناميكي عام

من اهم خصائص الاستجابة الناجمة عن هذه الاحمال:

- ان الدور الذي يلعبه التخميد في تحديد القيمة العظمى للاستجابة قليل اذا ما قورن مع حالة الاثارة التوافقية.
- يتم الوصول الى القيمة العظمى للاستجابة في وقت قصير جدا قبل ان تتمكن قوى التخميد من تبديد جزء هام من طاقة المنشا.

لهذين السببين سوف يتم اهمال دور التخميد على استجابة المنشات المعرضة لمثل هذا النوع من الاحمال

- الاستجابة الناتجة عن نبضة جيبية response to sine wave impulsive



تقسم الاستجابة الناتجة عن الحمل المبين في الشكل للمجال الزمني الذي تعمل فيه القوة الى مرحلتين طبقا للمجال الزمني الذي تعمل فيه القوة

تكتب معادلة الاستجابة المستقرة

$$u_p = \left(\frac{U_o}{1 - r^2} \right) \cos \Omega t \qquad , \qquad r \neq 1$$

إذا كان $r > 1$ فإن $1 - r^2 < 0$ وبالتالي فإن الا ستجابة متوافقة في الصفحة مع الإثارة.

الاستجابة العابرة او الحل المتمم

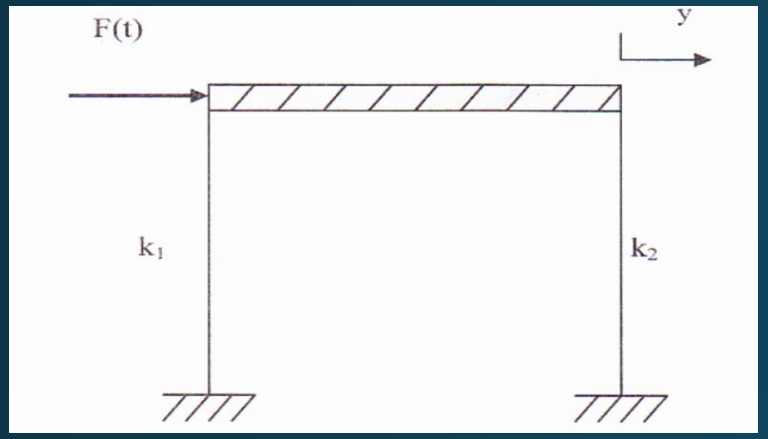
$$u = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

حيث A_1 و A_2 ثابتان حقيقيان يمكن تحديدهما من الشروط الابتدائية للحركة

$$p(t) = p_o \cos \Omega t$$

حمل نبضي بشكل نصف موجة جيبية

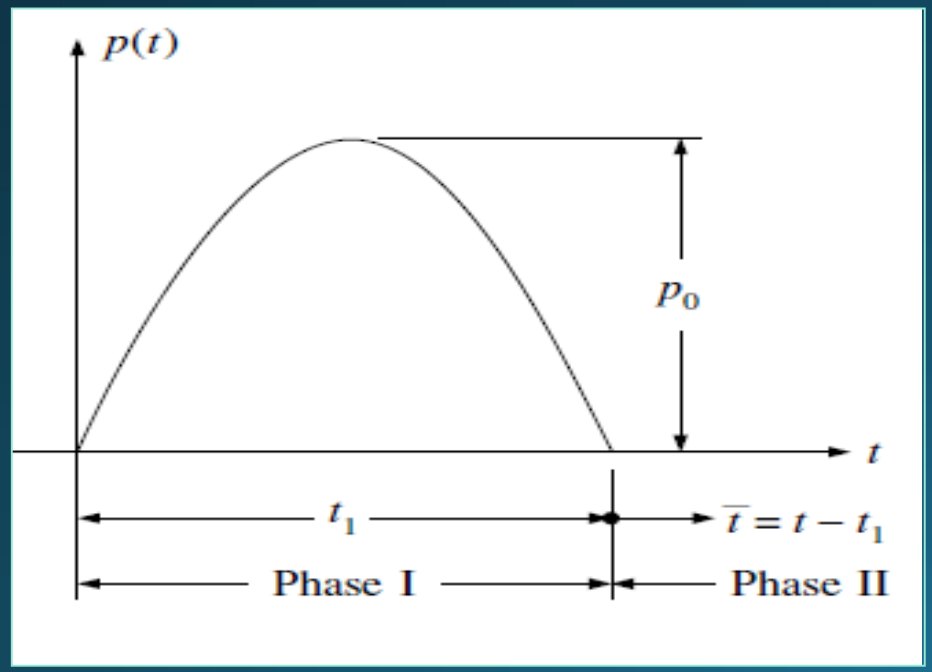
لو خضع الاطار المبين في الشكل الى حمل نبضي بشكل نصف موجة جيبية وكما هو موضح في الشكل نجد ان الاستجابة تنقسم الى مجالين :



مجال اول: phase I يكون فيه الاهتزاز قسريا

مجال ثاني: phase II يكون فيه الاهتزاز حرا

وهنا يجب ايجاد حل معادلة الاهتزاز في كل مجال



مجال اول: phase I يكون فيه الاهتزاز قسريا

تخضع الجملة في هذه المرحلة الى قوة جيبية فتبدأ الاهتزاز من حالة الراحة ، وبالتالي فان معادلة الاستجابة بجزئيها المستقر والعابر يمكن استنتاجها على غرار المعادلة

$$u = \frac{p_o}{k}\ \frac{1}{1-r^2}\left(\sin \Omega\ t - r \sin\ \omega t\right) \qquad 0 \le t \le t_1$$

فتكتب كما يلي:

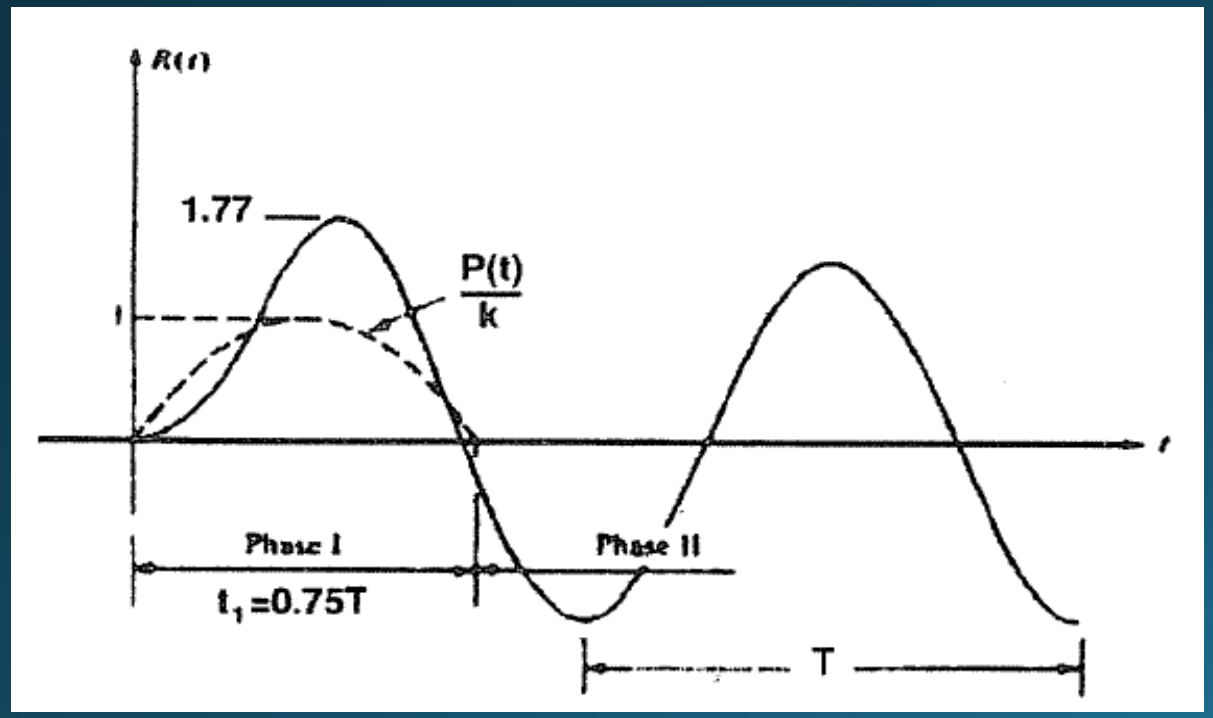
$$U=\frac{p_0}{k}\cdot\frac{1}{1-r^2}\cdot(\sin\Omega t - r\sin\omega t) \qquad 0 \le t \le t_1$$

محال ثاني: phase II يكون فيه الاهتزاز حرا

هي مرحلة اهتزاز حر تبدأ بعد نهاية المرحلة الاولى وتعتمد على الانتقال $u_{(t1)}$ والسرعة الابتدائية $\dot{u}_{(t1)}$

تكتب معادلة الحركة كما يلي:

$$u(\bar{t}) = u(t_1) \cdot \cos\omega \cdot \bar{t} + \frac{\dot{u}_{(t1)}}{\omega} \sin\omega \cdot \bar{t} \qquad where \qquad \bar{t} = t - t_1 \geq 0$$



تعتمد شدة الاستجابة بشكل اساسي على النسبة بين فترة تطبيق النبضة ودور اهتزاز الجملة ويبين الشكل نسبة الاستجابة او عامل الحمل الديناميكي

$\frac{t_1}{T} = 0.75$ من اجل $R(t) = \frac{u}{p_0/k}$

بشكل عام إن القيمة العظمى للاستجابة الناتجة عن مثل هذا النوع من الأحمال أكثر أهمية بالنسبة للمهندسين من مخطط الحركة الكامل. ويحدد الزمن الذي تبلغ عنده الاستجابة قيمتها العظمى باشتقاق العلاقة

$$u = \frac{p_o}{k}\ \frac{1}{1-r^2}\left(\sin \Omega\ t - r \sin\ \omega t\right) \quad 0 \le t \le t_1$$

ومساواة الناتج بالصفر أي:

$$\frac{du}{dt} = 0 = \frac{p_o}{k}\ \frac{1}{1-r^2}\ \left(\Omega \cos \Omega t - r\omega \cos \omega t\ \right) \Longrightarrow$$

$$\cos\ \Omega t = \cos \omega t$$

$$\Omega t = 2\pi n \pm \omega t \quad , \ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots..$$

العلاقة صحيحة إذا حدثت القيمة العظمى للاستجابة في المرحلة الأولى من الحركة أي في المجال $t_1 \ge t \ge 0$ أو عندما: $\Omega t \le \pi$

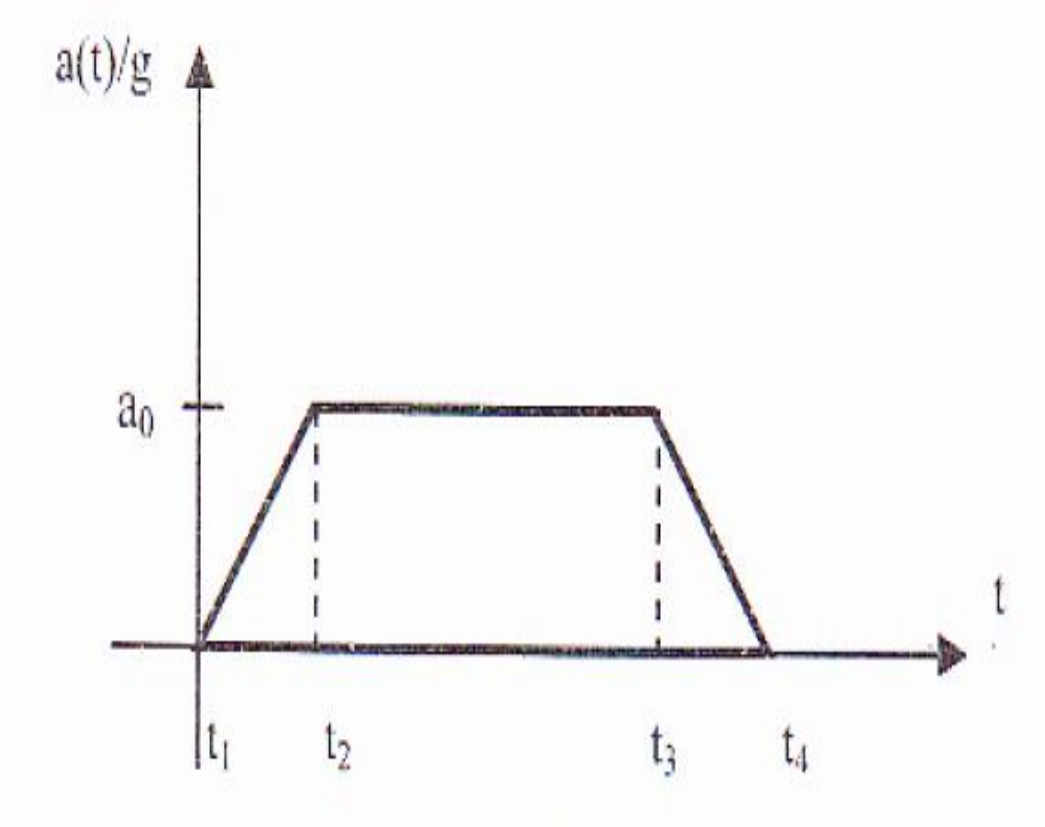
$$u(t) = \underbrace{\boldsymbol{u(0)\cos\omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k}\cdot\frac{\bar{\omega}/\omega_n}{1-(\bar{\omega}/\omega_n)^2}\right]\sin\omega_n t}}_{\text{الاستجابة العابرة}} + \underbrace{\boldsymbol{\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-(\bar{\omega}/\omega_n)^2}\sin\bar{\omega}t}}_{\text{الاستجابة المستقرة}}$$

حمل نبضي عام

في حال حمل نبضي عام كما في الشكل حيث نجد ان الاستجابة تنقسم الى اربعة مجالات :

- المجال الاول :اهتزاز قسري بشكل مثلثي
- المجال الثاني:اهتزاز قسري بشكل مستطيل
- المجال الثالث : اهتزاز قسري مثلثي
- المجال الرابع:اهتزاز حر

ايجاد حل لمعادلة الاهتزاز لكل مجال



حمل نبضي عام

example

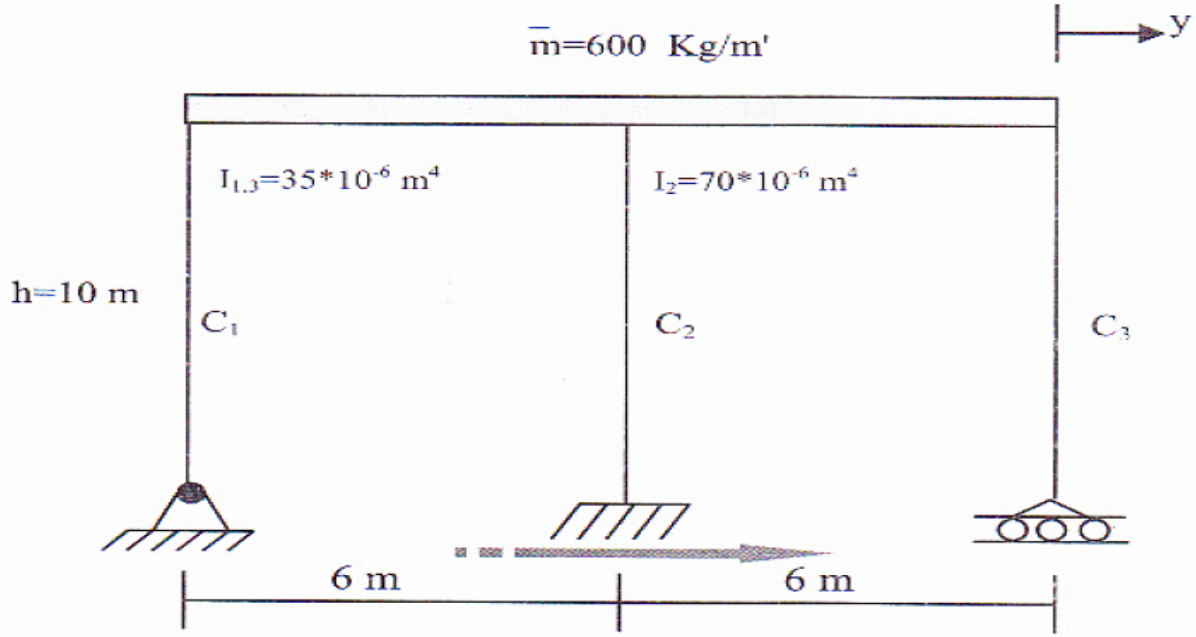
تتعرض أساسات إطار معدني لهزة أرضية مبينة في الشكل، وباعتبار أن الجائز صلب جداً بالمقارنة مع الأعمدة وبإهمال وزن الأعمدة وإهمال التخامد، وباعتبار أن $E=200GPa$ وأن $I_2=70*10^{-6}\ m^4$,$I_{1,3}=35X10^{-6}\ m^4$:

أ. أوجد علاقة الانتقال كتابع للزمن،

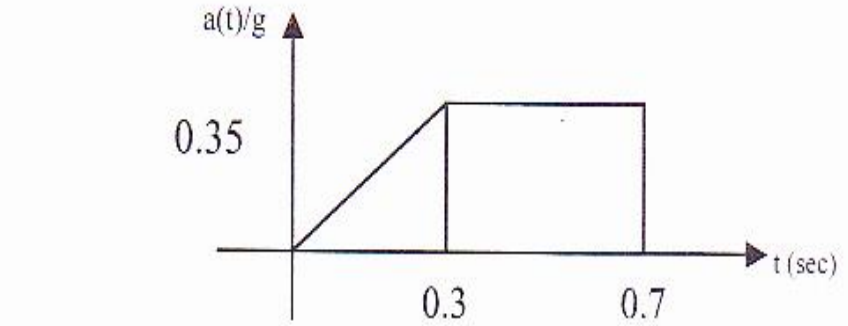
ب. ارسم منحني الاهتزاز خلال الفاصل الزمني: $t=0\rightarrow 1.4sec$،

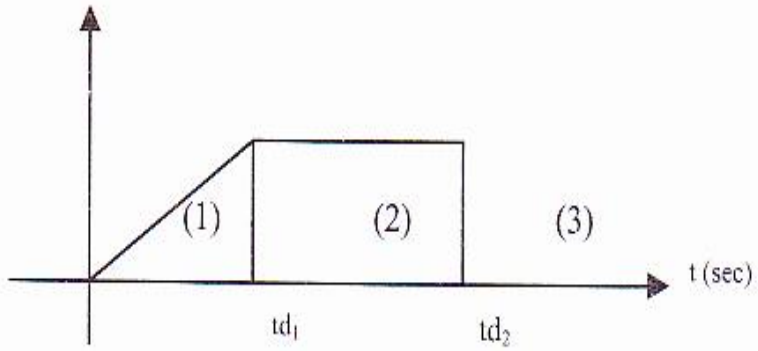
ج. أوجد الانتقال الأعظمي والزمن الموافق له من المنحني،

د. أوجد قوة القصّ الأعظمية في كل عمود.

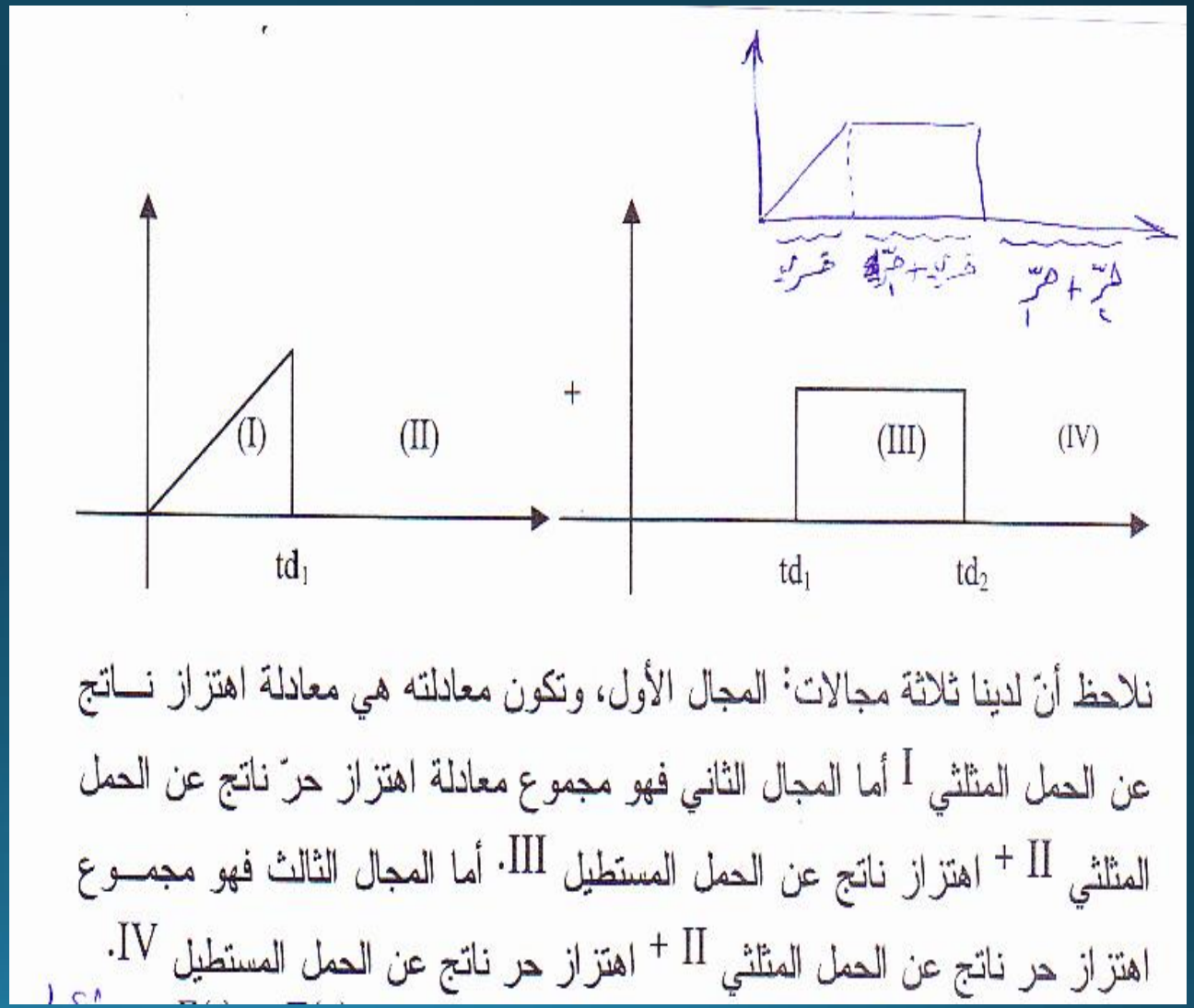


Solution





=

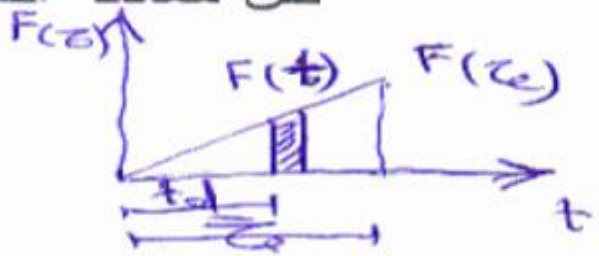


نلاحظ أنّ لدينا ثلاثة مجالات: المجال الأول، وتكون معادلته هي معادلة اهتزاز نـــاتج عن الحمل المثلثي I أما المجال الثاني فهو مجموع معادلة اهتزاز حرّ ناتج عن الحمل المثلثي II + اهتزاز ناتج عن الحمل المستطيل III. أما المجال الثالث فهو مجمـــوع اهتزاز حر ناتج عن الحمل المثلثي II + اهتزاز حر ناتج عن الحمل المستطيل IV.

$$\frac{F(t)}{td} = \frac{F(\tau)}{\overline{\tau}} \Rightarrow F(\tau) = F\frac{\tau}{td}$$

* المجال الأول: من تشابه المثلثات:

حلّ معادلة الحركة من الشكل، مع اعتبار y انتقال نسبي:



$$\frac{F(t)}{td} = \frac{F(\tau)}{\overline{\tau}}$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \frac{F}{m\omega td}\int_0^t \tau \underbrace{\sin\omega(t-\tau)d\tau}$$

سكامل بالتجزئة

$$u = \tau \Rightarrow du = d\tau \qquad \sin\omega(t-\tau)d\tau = dv \Rightarrow v = \frac{1}{\omega}\cos\omega(t-\tau)$$

$$u.v - \int v.du$$

$$\frac{\tau}{\omega}\cos\omega(t-\tau) - \int\frac{1}{\omega}\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{F}{td.m\omega}\left[\frac{\tau}{\omega}\cos\omega(t-\tau) + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\tau)\right]_0^t$$

$$y(t) = \frac{F}{td.m\omega}\left[\frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\right] \Rightarrow y(t) = \frac{F}{td.m\omega^2}\left[t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]$$

Y1 $$y(t) = \frac{yst}{td_1}\left[t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right] \Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{yst}{td_1}[1 - \cos\omega t]$$

المجال الثاني: II+III

مهم جدا

$t = t - td_1$

اهتزاز حرعن الحمل المثلثي

$$II:\ y(t) = y_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

من علاقة المجال الأول نعوض في $y(t)$ و $\dot{y}(t)$ الزمن $t = t_{d1}$ للحصول على شروط ابتدائية للمجال الثاني كاهتزاز حر:

$$y_0 = \frac{yst}{td_1}\left[td_1 - \frac{1}{\omega}\sin\omega td_1\right] \Rightarrow v_0 = \dot{y} = \frac{yst}{td_1}[1-\cos\omega td_1]$$

$$y(t) = \frac{yst}{td_1}\left[\begin{array}{l} td_1\cos\omega(t-td_1) - \frac{1}{\omega}\cos\omega(t-td_1).\sin\omega td_1 + \\ \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-td_1) - \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-td_1).\cos\omega td_1 \end{array}\right]$$

$$y(t) = \frac{yst}{td_1}\left[td_1\cos\omega(t-td_1) + \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-td_1) - \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-td_1+td_1)\right]$$

$$y(t) = yst\left[\cos\omega(t-td_1) + \frac{1}{\omega.td_1}\sin\omega(t-td_1) - \frac{1}{\omega td_1}\sin\omega t\right]$$

III: معادلة الاهنزاز القسري عن الحمل المستطيل

$$y(t) = \frac{F}{m\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = \frac{F}{m\omega}\left[\frac{1}{\omega}\cos\omega(t-\tau)\right]_0^t$$

$$y(t) = \frac{F}{m\omega^2}[1-\cos\omega t] \qquad ;t = t - td_1$$

$\Rightarrow III$

$$y(t) = yst[1-\cos\omega(t-td_1)] \quad ;\dot{y}(t) = yst[\omega\sin\omega(t-td_1)]$$

$$y(t) = yst\left[1-\cos\omega(t-td_1)+\cos\omega(t-td_1)+\frac{1}{\omega\cdot td_1}\sin\omega(t-td_1) - \frac{1}{\omega td_1}\sin\omega t\right]$$

Y2

$$y(t) = yst\left[1+\frac{1}{\omega td_1}\sin\omega(t-td_1) - \frac{1}{\omega td_1}\sin\omega t\right] \qquad 0.3 \le t \le 0.7\ Sec$$

المجال الثالث: II+IV: اهتزاز حرّ مستطيل:

اهتزاز حر مستطيل =اهتزاز حر 2

$$IV: \; y(t) = y_0 \cos\omega(t - td_2) + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega(t - td_2) \qquad ;t = t - td_2$$

نحصل على y_0, v_0 من العلاقة III: ← بتعويض t=td2-td1

دوما قيم v_0, y_0 نوجدها انطلاقا من معادلة اهتزاز حر ... وليس المعادلة النهائية التي تمثل اهتزاز كامل المرحلة السابقة

$$y_0 = yst\left[1-\cos\omega(td_2-td_1)\right] \quad ;v_0 = yst\left[\omega\sin\omega(td_2-td_1)\right]$$

$$y(t) = yst\begin{bmatrix}\cos\omega(t-td_2)-\cos\omega(td_2-td_1)\cos\omega(t-td_2)\\ +\sin\omega(t-td_2)\sin\omega(td_2-td_1)\end{bmatrix}$$

$$y(t) = yst\left[\cos\omega(t-td_2)-\cos\omega(td_2-td_1+t-td_2)\right]$$

$$IV: y(t) = yst\left[\cos\omega(t-td_2)-\cos\omega(t-td_1)\right]$$

$$y(t) = II + IV$$

$$\Rightarrow y(t) = yst\begin{bmatrix}\cos\omega(t-td_1)+\dfrac{1}{\omega td_1}\sin\omega(t-td_1)-\dfrac{1}{\omega td_1}\sin\omega t+\cos\omega(t-td_2)\\ -\cos\omega(t-td_1)\end{bmatrix}$$

Y_3

$$y(t) = yst\left[\frac{1}{\omega td_1}\sin\omega(t-td_1)-\frac{1}{\omega td_1}\sin\omega t+\cos\omega(t-td_2)\right] \quad ;t \geq 0.7Sec$$

$$k_1 = 3 \times \frac{EI}{h_1^3} = 21000\, N/m'.$$

$$k_2 = 12 \times \frac{EI}{h_3^3} = 168000\, N/m'.$$

$$k_e = k_1 + k_2 = 189000\, N/m'$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = 5.12\, rad/\sec$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.226 \sec$$

$F_0 = -m\ddot{y}_s = -600 \times 12 \times 0.35 \times 9.81 = -24721.2N$; $\ddot{y}_s = 0.35g$

$$yst = \frac{F_0}{k} = -0.1308m$$

$$(1) \Rightarrow y(t) = 0.436\left[t - \frac{1}{5.12}\sin(5.12t)\right] \qquad 0 \le t \le 0.3$$

$$(2) \Rightarrow y(t) = 0.1308\left[1 + \frac{1}{1.536}\sin(5.12(t-0.3)) - \frac{1}{1.536}\sin(5.12t)\right]$$

$$;0.3 \le t \le 0.7$$

$$(3) \Rightarrow y(t) = 0.1308\left[\frac{1}{1.536}\sin(5.12(t-0.3)) - \frac{1}{1.536}\sin(5.12t) + \cos(5.12(t-0.7))\right]$$

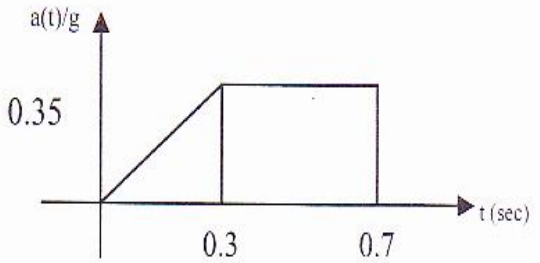
$$;t \ge 0.7Sec$$

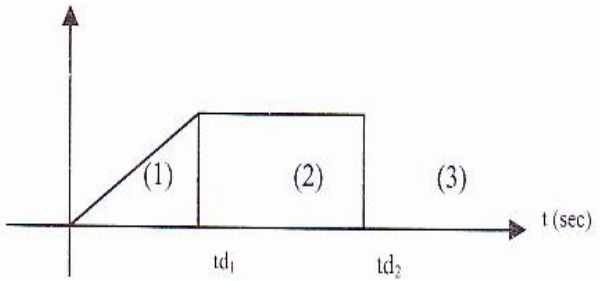
$$\frac{3 * 200 * 10^{+9} * 35 * 10^{-6}}{(10)^3}$$

$$\frac{12 * 200 * 10^{+9} * 70 * 10^{-6}}{(10)^3}$$

$\therefore K_3 = 0$ لأن العمود قصير

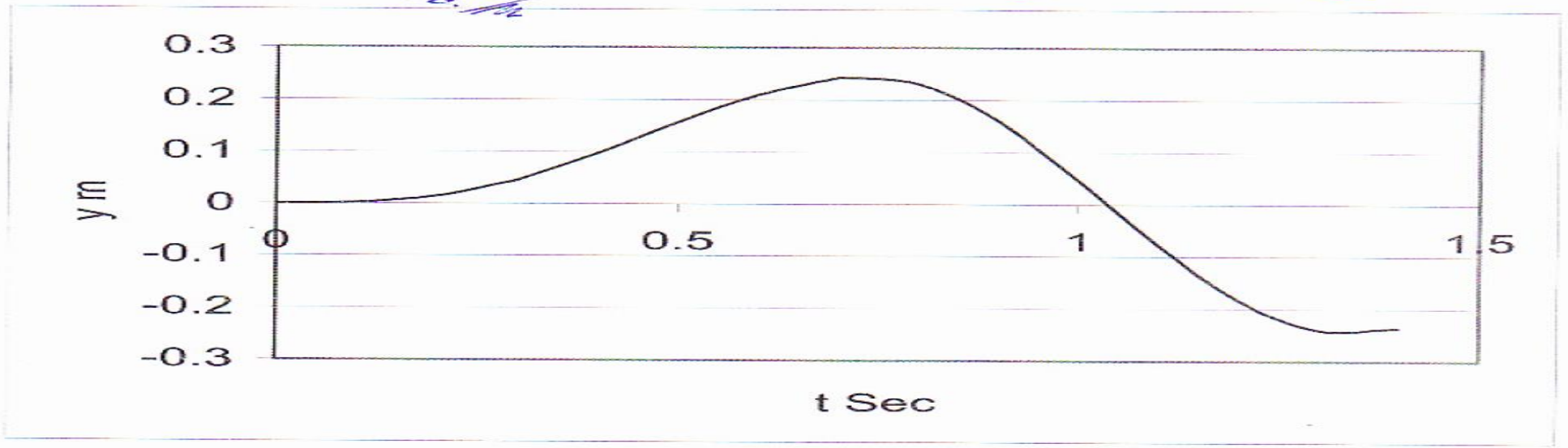
$$\omega = \sqrt{\frac{189000}{600 * 12}}$$





=

t (sec)	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y(t) m	0	0.00188	0.01446	0.045695	0.096877
t (sec)	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y(t) m	0.156759	0.209983	0.2429	0.230293	0.158624
t (sec)	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y(t) m	0.046273	-0.07795	-0.18217	-0.23968	-0.23572



نلاحظ أن Ymax في المجال الثالث، وبالتجريب نجد أن:

الانتقال الأعظمي:

$y_{max}=0.24583\ m\ ;\ t=0.73sec$

قوة القصّ الأعظمية في العمود الأول:

$V_{1max}=0.24583X21000=5162.43N=5.2kN$

قوة القصّ الأعظمية في العمود الثاني:

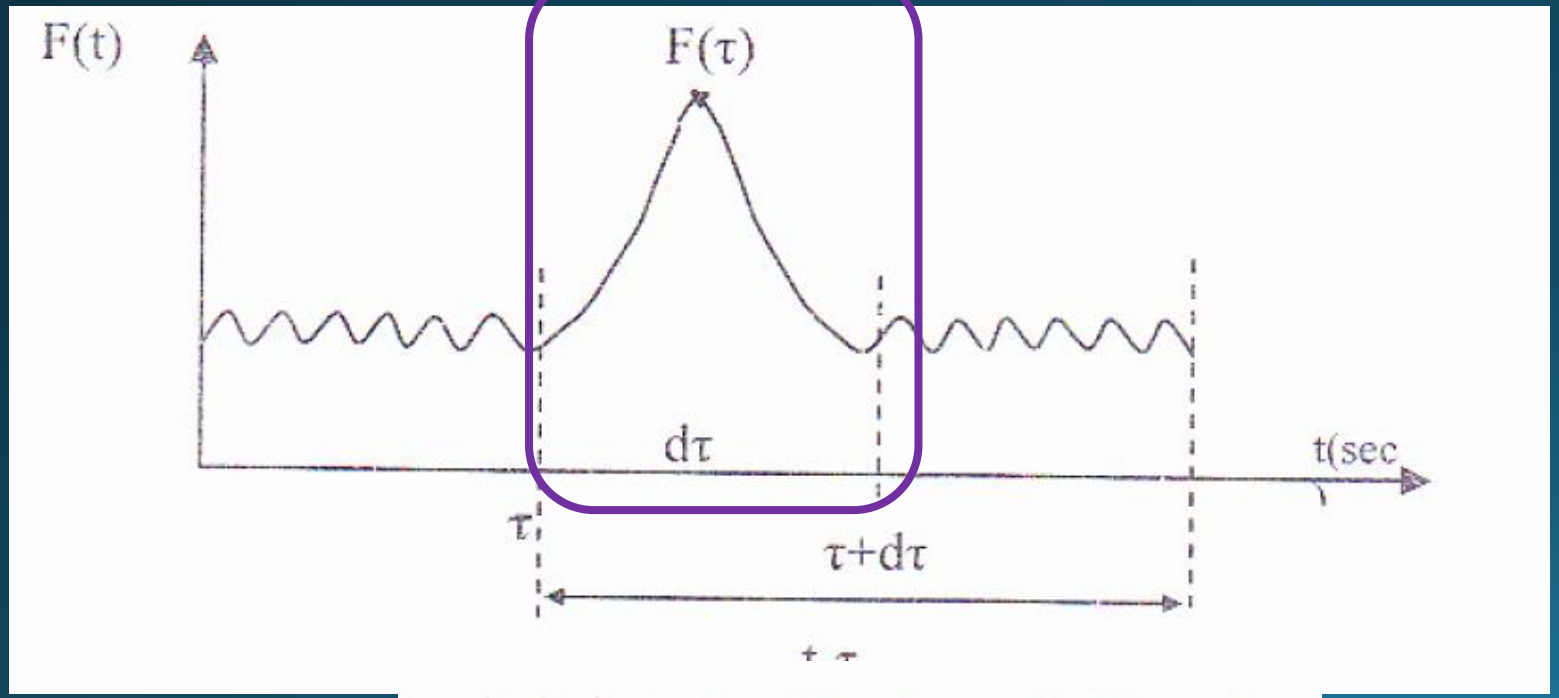
$V_{2max}=0.24583X168000=41299.44N=41.3kN$

قوة القصّ في العمود الثالث:

$V_3=0$

استجابة منشا وحيد درجة الحرية لحمل نبضي بدون تخامد
Response Of SDOF Structure To Impulsive Loading –No Damping

سيتم في هذا الجزء بحث تاثير الاحمال النبضية في المنشات وسيتم اجراء التحليل الديناميكي وايجاد حل المعادلة التفاضلية للاهتزاز ومن ثم الاستفادةمن هذا الحل وتعميمه في حالات التحميل العامة.



حمل ديناميكي عام يتضمن حمل نبضي

الشكل التالي يخضع لحمل ديناميكي عام يتخللها حمل نبضي يبدأ عند الزمن τ ولمدة زمنية قصيرة مدتها $d\tau$

تتم دراسة تاثير الحمل خلال الفاصل الزمني(τ-t) ويمكن تمثيل الحمل النبضي بالعلاقة التالية

حسب قانون نيوتن $F(\tau) = m \cdot a$

حيث: a التسارع ، و m الكتلة

$N \cdot sec$
قوة الدفع او قوة الصدم

$kg \cdot m/sec$
كمية الحركة

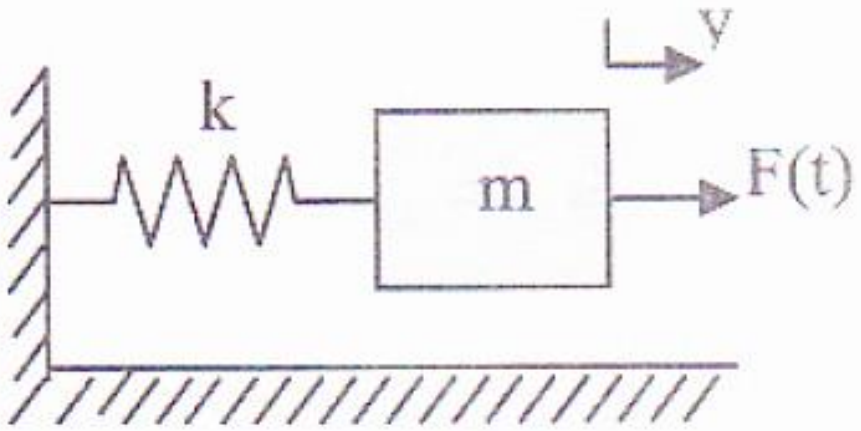
$a = \frac{dv}{d\tau}$ ⟵ $F(\tau) = m \cdot \frac{dv}{d\tau}$ ⟵ * $F(\tau) \cdot d\tau = m \cdot dv$

وتعرف العلاقة (*) بقوة الدفع او قوة الصدم وواحدتها $N \cdot sec$ و هي تكافئ كمية الحركة والتي واحدتها $kg \cdot m/sec$ وبتقسيم طرفي المعادلة على الكتلة m نحصل على المعادلة التالية:

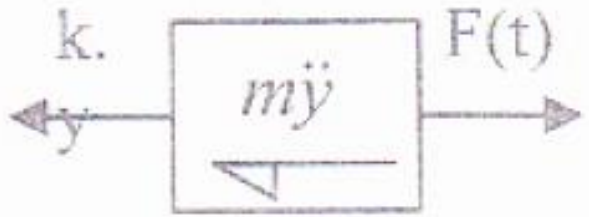
** $dv = \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m}$

حيث تعتبر dv تغير السرعة الناتج عن تطبيق الحمل الديناميكي النبضي وواحدته m/sec .

نرسم النموذج الرياضي ومخطط الجسم الطليق كما هو مبين في الشكل التالي



Mathematical Model



D.F.B.D

النموذج الرياضي ومخطط الجسم الحرّ الديناميكي

معادلة الحركة

$$m\ddot{y} + ky = F(t)$$

وبالتالي حل معادلة الحركة في حال وجود قوة مطبقة على منشا وحيد درجة الحرية هو مؤلف من حدين حل متمم وحل خاص

الحل العام= $Y(t) = Y_c(t) + Y_p(t)$ ⟸ الحل المتمم $Y_c(t) = Y_0 \cdot \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin \omega t$

بالاعتماد على الحل المتمم $Y_c(t)$ سيتم ايجاد الحل الخاص $Y_p(t)$ باعتبار ان النبضة ستزود المنشا بشروط ابتدائية معينة وهي : $dv = v_0$ ، $Y_0 = 0$ والتي يمكن ان تعوض في معادلة الحل المتمم التالية:

$$Y_c(t) = Y_0 \cdot \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin \omega t$$

وباستخدام العلاقة $dv = \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m}$ ** مما يؤدي الى ايجاد تغير في الانتقال dY خلال الفاصل الزمني $d\tau$ او عند اي زمن (t) كما يلي :

$$dY_c(t) = 0 + \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m \cdot \omega} \cdot \sin \omega t$$

وخلال الزمن (t-τ) تصبح العلاقة:

$$dY_c(t) = \frac{F(\tau) \cdot d\tau}{m \cdot \omega} \cdot \sin \omega (t - \tau)$$

باجراء التكامل وبتعويض $Y_c(t)$ بالحد $Y_p(t)$ ليصبح لدينا الحل الخاص الناتج عن الحمل النبضي

التكامل يدعى تكامل دوهاميل

$$Y_p(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega (t - \tau) . d\tau$$

حيث يمثل $Y_p(t)$ التاثير المستمر للقوة في المنشا

وباعتبار المعادلة

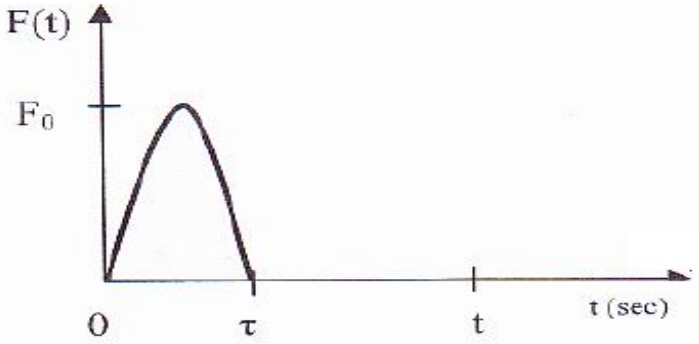
$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

ومع شروط ابتدائية في العلاقة

$$\left.\begin{aligned} t = 0;\ y_{t=0} = y_0 \ &\Rightarrow \quad A = y_0 \\ \dot{y}(t) &= -A\,\omega\sin\omega t + B\,\omega\cos\omega t \\ \dot{y}_{t=0} = v_0 &\Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} \end{aligned}\right\}$$

وهذا الاجراء يتم في حال شروط ابتدائية غير معدومة وباعتماد تكامل دوهاميل من المعادلة $Y_p(t)=\frac{1}{m\cdot\omega}\cdot\int_0^t F(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau)\cdot d\tau$ يتم الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية لحالة تاثير الاحمال النبضية مع اعتبار اهتزاز حر في الوقت نفسه وذلك بجمع الاستجابتين حسب مبدا التنضد :

$$Y(t) = Y_0\cdot\cos\omega t + \frac{V_0}{\omega}\cdot\sin\omega t + \frac{1}{m\cdot\omega}\cdot\int_0^t F(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau)\cdot d\tau$$



حمل نبضي عام بدون شروط ابتدائية

حالة شروط ابتدائية معدومة يصبح حل معادلة الحركة هو :

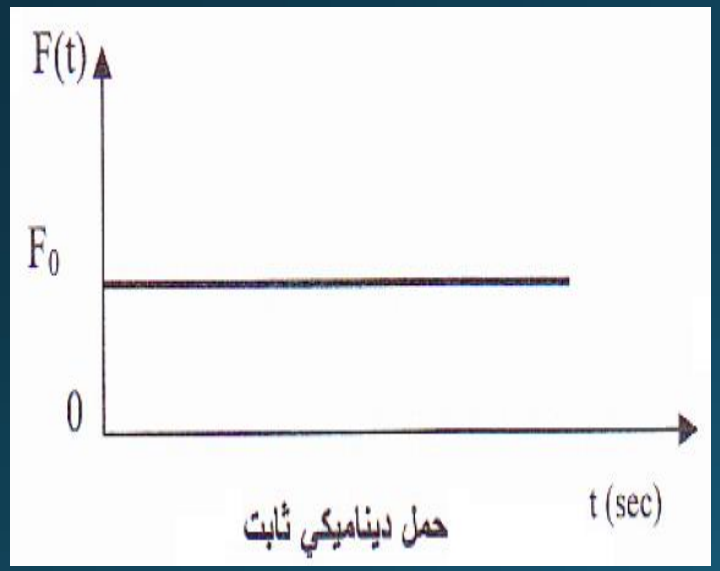
فقط $Y(t) = Y_p(t) = \frac{1}{m\cdot\omega}\cdot\int_0^t F(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau).d\tau$

سيتم الاستفادة من علاقة الاحمال النبضية لتحليل المنشآت الخاصة للاحمال الديناميكية العامة وسيتم التعرض لبعض الحالات الخاصة كمايلي:

❖الحمل الديناميكي الثابت constant dynamic loading

في هذه الحالة تكون القوة $F(\tau) = F_0$ ذات قيمة ثابتة تم تطبيقها بشكل مفاجئ على المنشا بدون شروط ابتدائية وبالعودة للعلاقة التي تم التوصل اليها:

*** $$Y(t) = Y_p(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega(t-\tau).d\tau$$



وباعتبار الشروط الابتدائية معدومة $y_0 = 0$، $v_0 = 0$

وكذلك القوة $F(\tau) = F_0$ وبالتعويض في المعادلة ***نجد:

$$y(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0 F_0 \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

وبإجراء التكامل نجد،

$$y(t) = \frac{F_0}{m \cdot \omega} \cdot \frac{1}{\omega} [\cos \omega(t-\tau)]_0^t$$

وحيث:

$$k = m.\omega^2$$

يتم الحصول على حلّ للمعادلة التفاضلية أو معادلة الاستجابة للحمل الديناميكي الثابت،

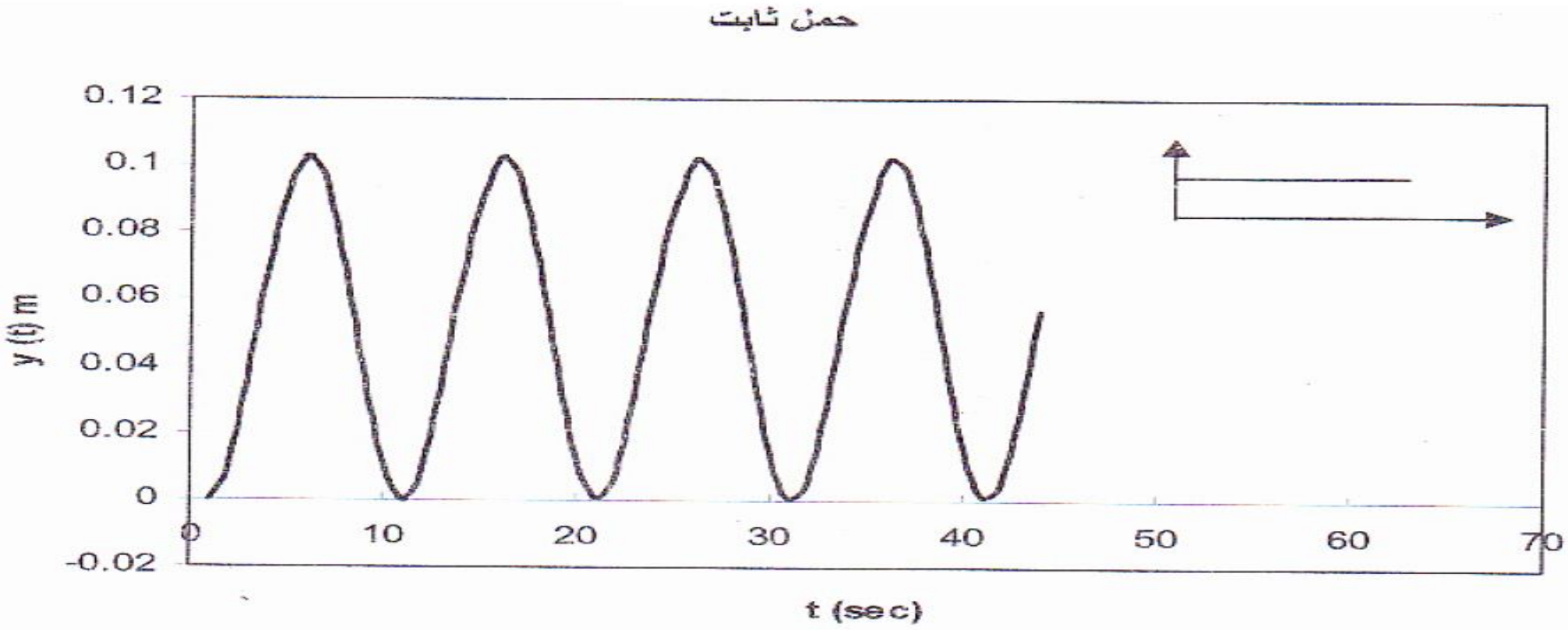
$$y(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega\, t)$$

$$y(t) = y_{st}(1 - \cos \omega t)$$

بالاعتماد على العلاقة $y_{st} = \frac{F_o}{k}$ وهو الانتقال الستاتيكي:

ويكون الانتقال الأعظمي: $y(t)_{\max} = 2y_{st}$

يمكن رسم منحني استجابة منشأ ما ذي صلابة معينة، يخضع لحمل ديناميكي مستطيل وثابت باعتبار العلاقة (5-10) كما هو موضح في الشكل (5-9).



منحنى الاستجابة لحمل ديناميكي ثابت

وبالتقسيم على y_{st}، نحصل على:

$$\frac{y(t)}{y_{St}} = 1 - \cos\omega t$$

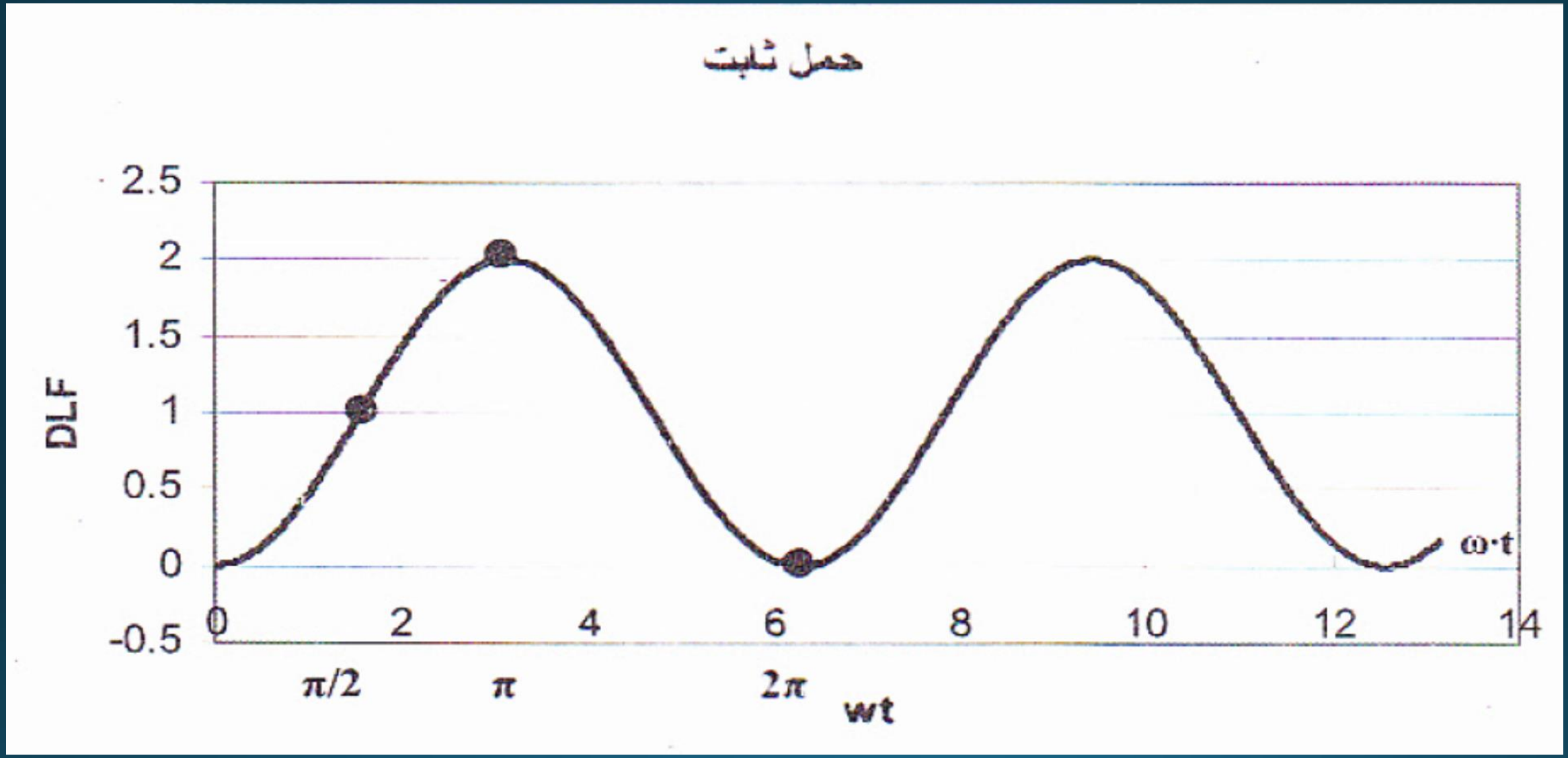
تدعى النسبة في العلاقة بعامل الحمل الديناميكي (Dynamic Load Factor)

ويرمز له بالرمز DLF: $DLF = 1 - \cos\omega t$ ⟸

وأعظم قيمة لهذا العامل DLF الناتج لهذا الحمل الديناميكي الثابت هي: $(DLF)_{max}=2$

أي ضعف الانتقال الستاتيكي، فيما لو طبقت القوة F_0 ببطء. وبرسم المنحني بين ωt و DLF وبالاعتماد على العلاقة (5-12) يتم الحصول على المنحني في الشكل

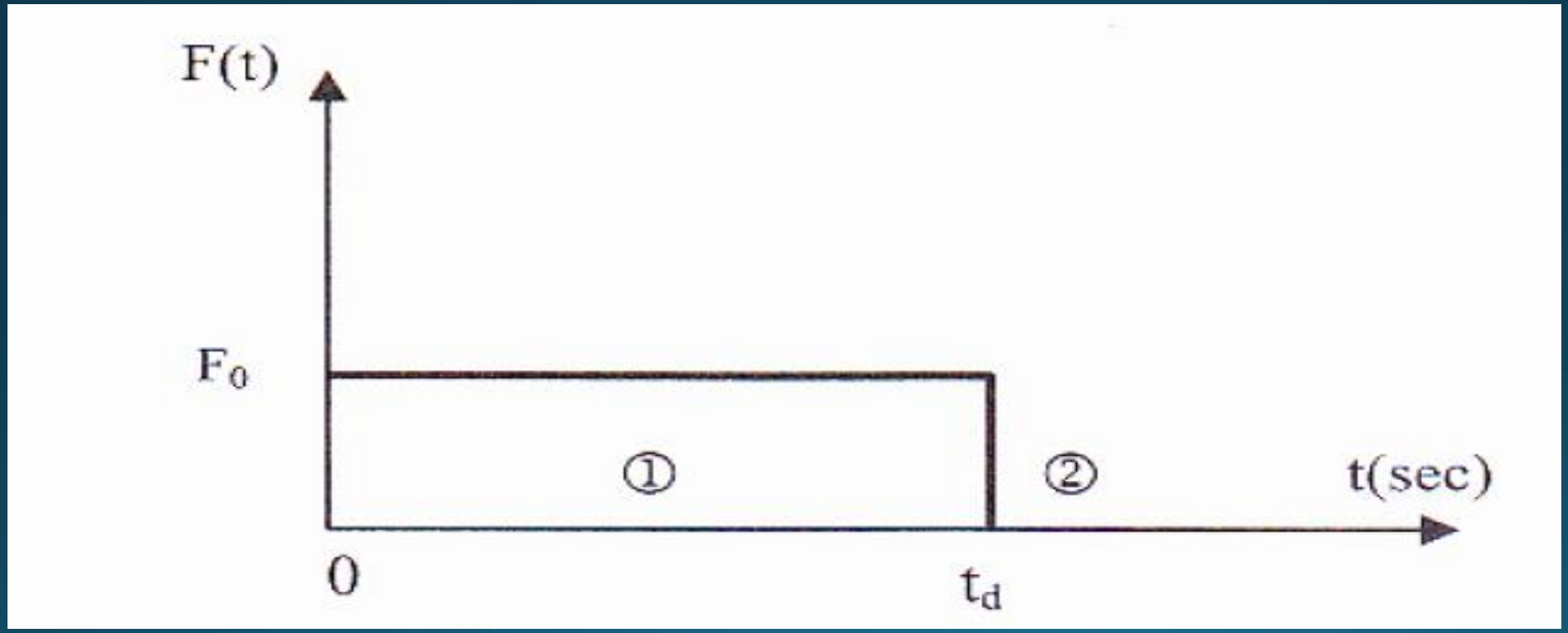
وهو يبين قيمة DLF الأعظمية.



منحني الاستجابة بدلالة DLF لحمل ديناميكي ثابت

الحمل الديناميكي المستطيل

باعتبار حمل ديناميكي نبضي ذي قيمة ثابتة مقدارها F_0 مطبقة خلال فترة زمنية محدودة t_d يمكن في هذه الحالة تمييز مرحلتين لتاثير هذا الحمل في المنشا



حمل ديناميكي مستطيل وثابت

المرحلة الاولى :تكون حلال فترة تطبيق الحمل النبضي حيث: $0 \leq t \leq t_d$

وحل معادلة الحركة $y(t) = y_{st}(1 - cos\,\omega t)$ **وهي علاقة الاهتزاز خلال فترة تطبيق الحمل المستطيل ويعطى العامل DLF بالعلاقة التالية:**

$$DLF = 1 - \cos \omega t$$

المرحلة الثانية : تكون بعد تطبيق الحمل حيث: $t \geq t_d$ وفي هذه الحالة يصبح الاهتزاز حر مع شروط ابتدائية يمكن ايجادها من المرحلة الاولى والزمن في هذه الحالة هو ($t - t_d$) وتصبح معادلة الاهتزاز الحر بعد المرحلة الاولى كما يلي:

$$Y(t) = Y_0 \cdot \cos \omega(t - t_d) + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin \omega(t - t_d)$$

يتم استنتاج V_0 و Y_0 من العلاقات التالية:

$$y(t)\,|\,t = t_d = y_{st}(1 - cos\,\omega t_d) = Y_0$$

$$\dot{y}(t)\,|\,t = t_d = y_{st}.\omega.\sin \omega t_d = V_0$$

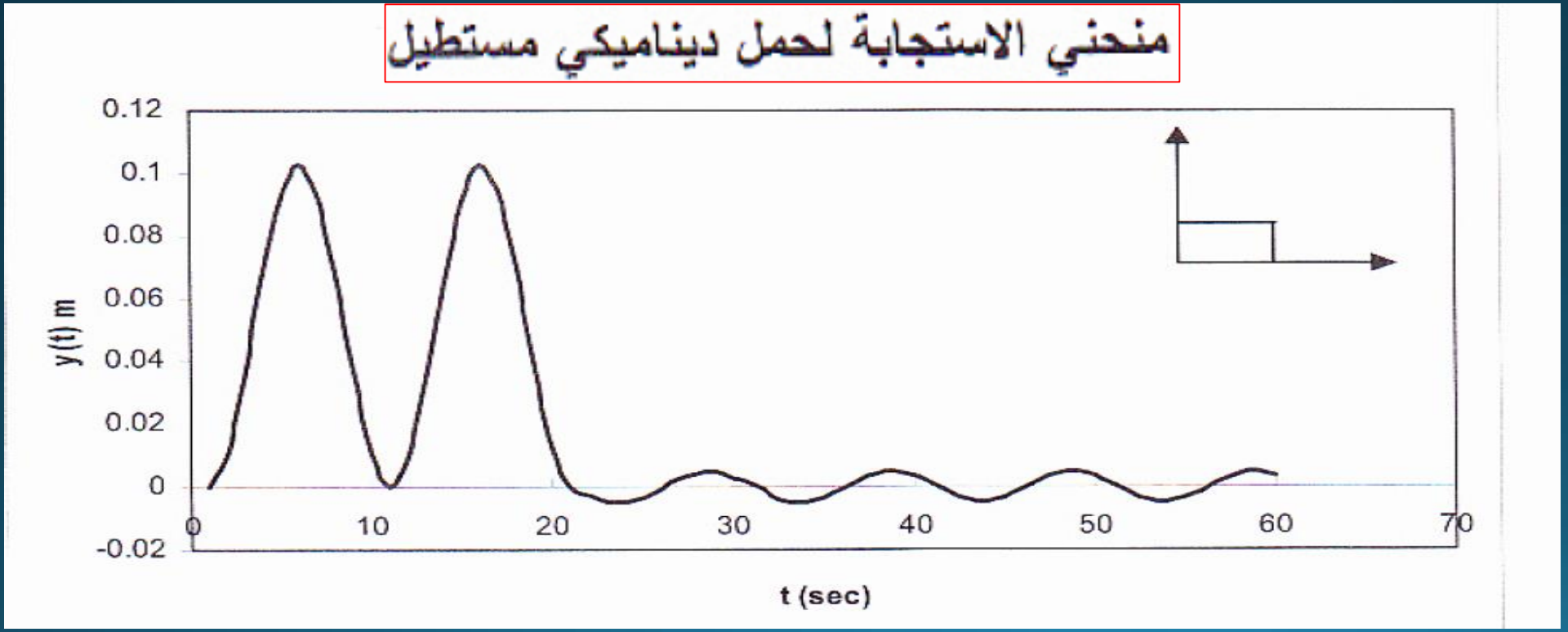
بتعويض قيم V_0 و Y_0 في $Y(t) = Y_0 \cdot \cos \omega(t - t_d) + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin \omega(t - t_d)$

وباستخدام العلاقة المثلثية التالية:

$$\cos \omega(t-\tau) = \cos \omega t. \cos \omega\tau + \sin \omega t. \sin \omega\tau$$

نحصل على $Y(t) = Y_{ST} \cdot [\cos \omega(t - t_d) - \cos \omega(t)]$

وهي علاقةالاهتزازالحر بعد تطبيق الحمل المستطيل



يتم رسم منحني استجابة منشأ ما ذي صلابة معينة يخضع لحمـل ديناميكي

مستطيل وثابت باعتبار كل من العلاقتين $DLF = 1\text{-}\cos\omega t$

$$Y(t) = Y_{ST} \cdot [\cos \omega(t - t_d) - \cos \omega(t)]$$

ويتم الحصول على عامل الحمل الديناميكي: $DLF = y_{max} / y_{st}$،

$$DLF = \cos \omega (t\text{-}t_d) - \cos \omega.t \quad ; \quad t > t_d$$

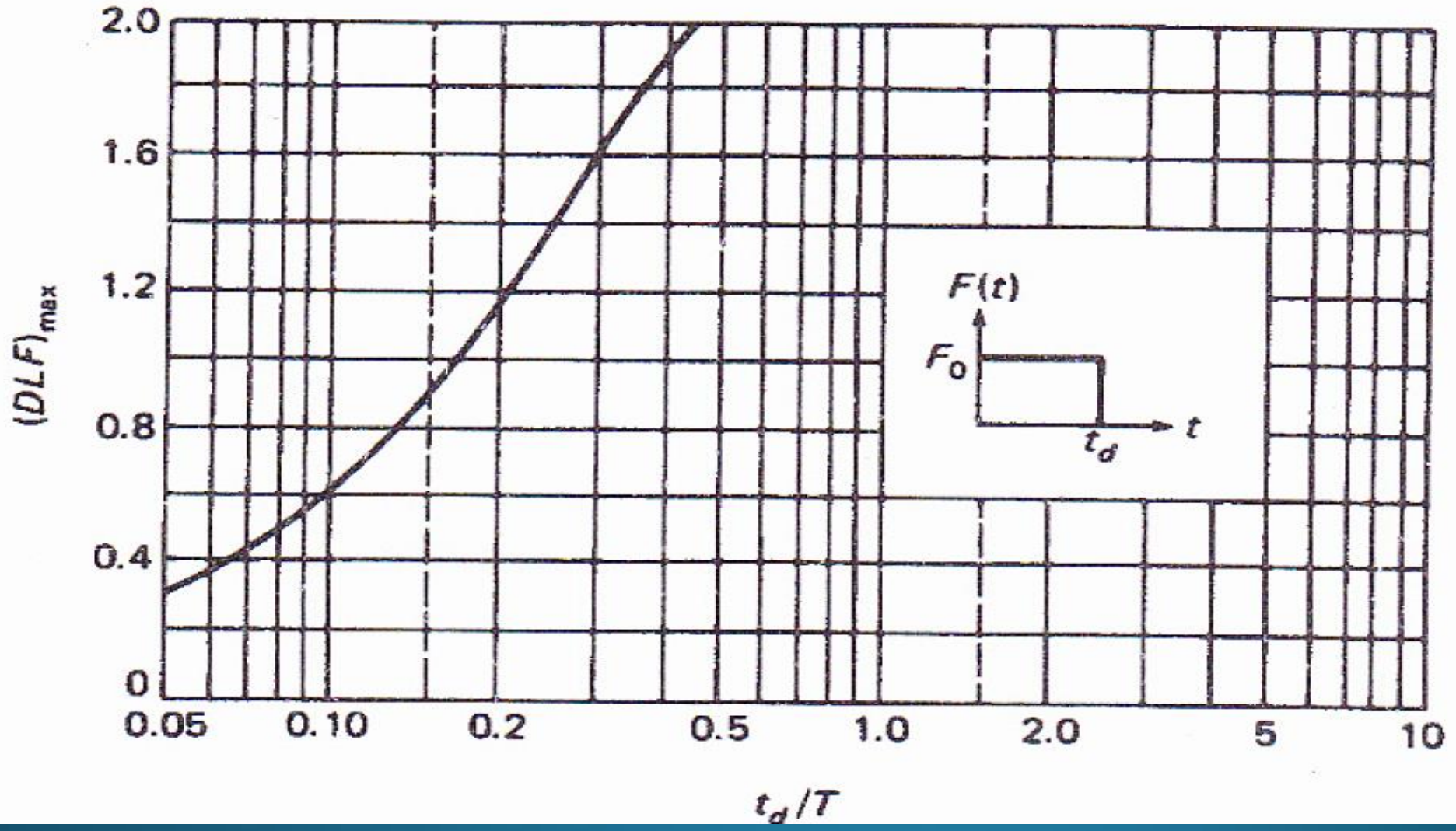
أو بدلالة الدور الطبيعي للمنشأ:

$$DLF = \cos 2\pi(\frac{t - t_d}{T}) - \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

هذا، ويمكن إعداد مخطط بياني يمثل العلاقة $DLF = 1\text{-}\cos\omega t$ والعلاقة $DLF = \cos 2\pi(\frac{t - t_d}{T}) - \cos 2\pi \frac{t}{T}$

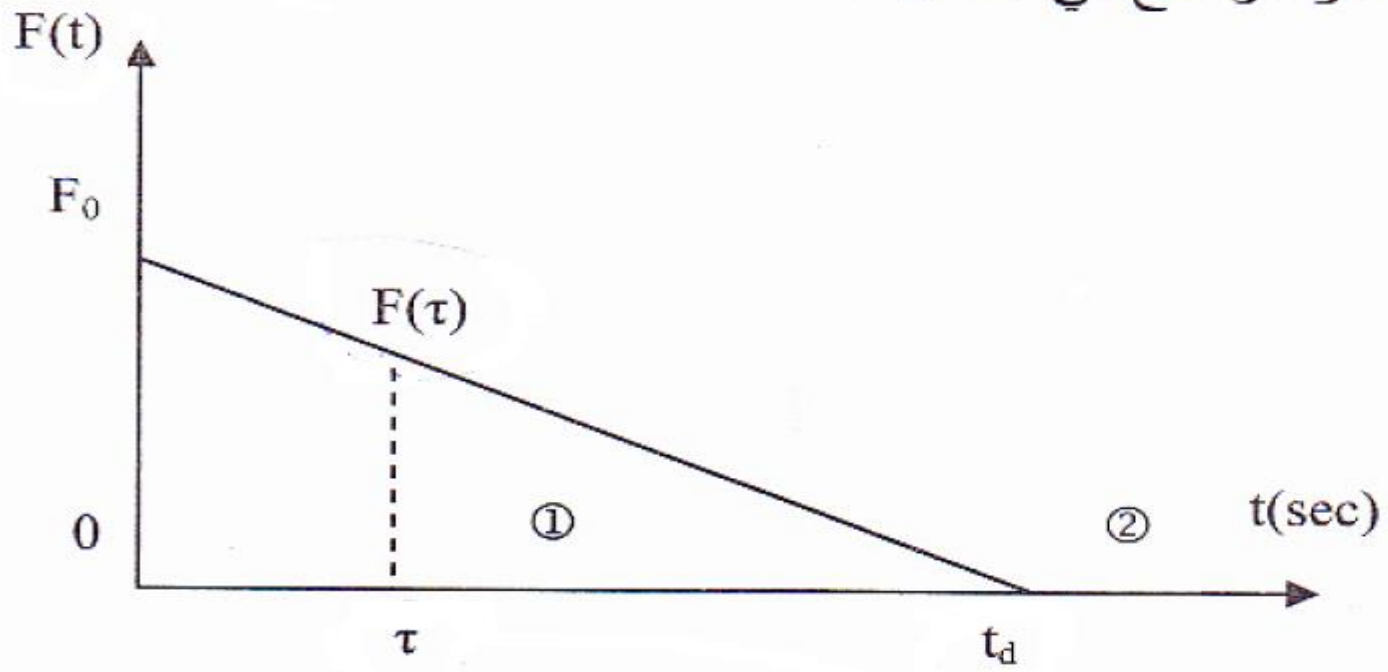
ولعـدة حالات من النسبة $\frac{t_d}{T}$ ويمكن استخدامه لتحديد القيمة الأعظمية للنسبة DLF كما فـي

عامل الحمل الديناميكى الأعظمى DLF لمنشا SDOF بتأثير حمل مستطيل بدون تخامد



الحمل الديناميكي المثلثي triangle Dynamic loading

باعتبار حمل ديناميكي نبضي مثلثي تم تطبيقه بشكل مفاجئ على منشأ في حالة سكون، قيمة الحمل هي F_0 عندما يكون الزمن $t = 0$ وتصبح صفراً عند انتهاء تطبيق الحمل وهو $t = t_d$ كما هو موضح في الشكل



حمل ديناميكي مثلثي

أيضاً في هذه الحالة تتم مراعاة مرحلتين أساسيتين، وهما:

المرحلة الأولى: تكون خلال فترة تطبيق الحمل المثلثي، حيث: $0 \le t \le t_d$، من تشابه المثلثات يتم الحصول على التابع $F(\tau)$ وهي علاقة القوة مع الزمن:

بتعويض $F(\tau) = F_0(1-\frac{\tau}{t_d})$ في العلاقة $Y(t) = \frac{1}{m\cdot\omega}\cdot\int_0^t F(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau).d\tau$

يتم الحصول على حل المعادلة التفاضلية لحالة الحمل المثلثي وخلال فترة تطبيقه:

وبإجراء التكامل مع اعتبار حدود التكامل (0—t)

يتم الحصول على حل المعادلة التفاضلية لحالة الحمل المثلثي وخلال فترة تطبيقه:

$$y(t) = y_{st}\left[(1-\cos\omega\, t)+\frac{1}{t_d}\left(\frac{\sin\omega\, t}{\omega}-t\right)\right]$$

ويصبح عامل الحمل الديناميكي: $DLF = y_{max}/y_{st}$، كما يلي:

$$DLF = (1-\cos\omega\, t)+\frac{1}{t_d}\left(\frac{\sin\omega\, t}{\omega}-t\right)$$

المرحلة الثانية: تكون بعد تطبيق الحمل، وهي حالة اهتزاز حرّ مع شروط ابتدائية، يمكن الحصول عليها من نهاية المرحلة الأولى: $t > t_d$، والزمن في هذه المرحلة $(t-t_d)$ ومعادلة الاهتزاز الحر معطاة بالعلاقة

$$Y(t) = Y_0 \cdot \cos\omega(t - t_d) + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin\omega(t - t_d)$$

الشروط الابتدائية y_0 و v_0 يتم استنتاجها من العلاقة $y(t) = y_{st}\left[(1-\cos\omega t) + \frac{1}{t_d}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega} - t\right)\right]$

عند الزمن $t = t_d$ وبالتعويض في العلاقة $Y(t) = Y_0 \cdot \cos\omega(t - t_d) + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin\omega(t - t_d)$

وبعد الإصلاح تنتج العلاقة الاهتزاز الحر الناتج عند انتهاء تطبيق الحمل المثلثي:

$$y = y_{st}\left[\frac{\sin\omega t - \sin\omega(t - t_d)}{\omega \cdot t_d} - \cos\omega t\right]$$

$$DLF = \frac{\sin\omega t - \sin\omega(t - t_d)}{\omega \cdot t_d} - \cos\omega t$$

عامل الحمل الديناميكي: $DLF = y_{max} / y_{st}$

أو بدلالة الدور الطبيعي T لأي منشأ،

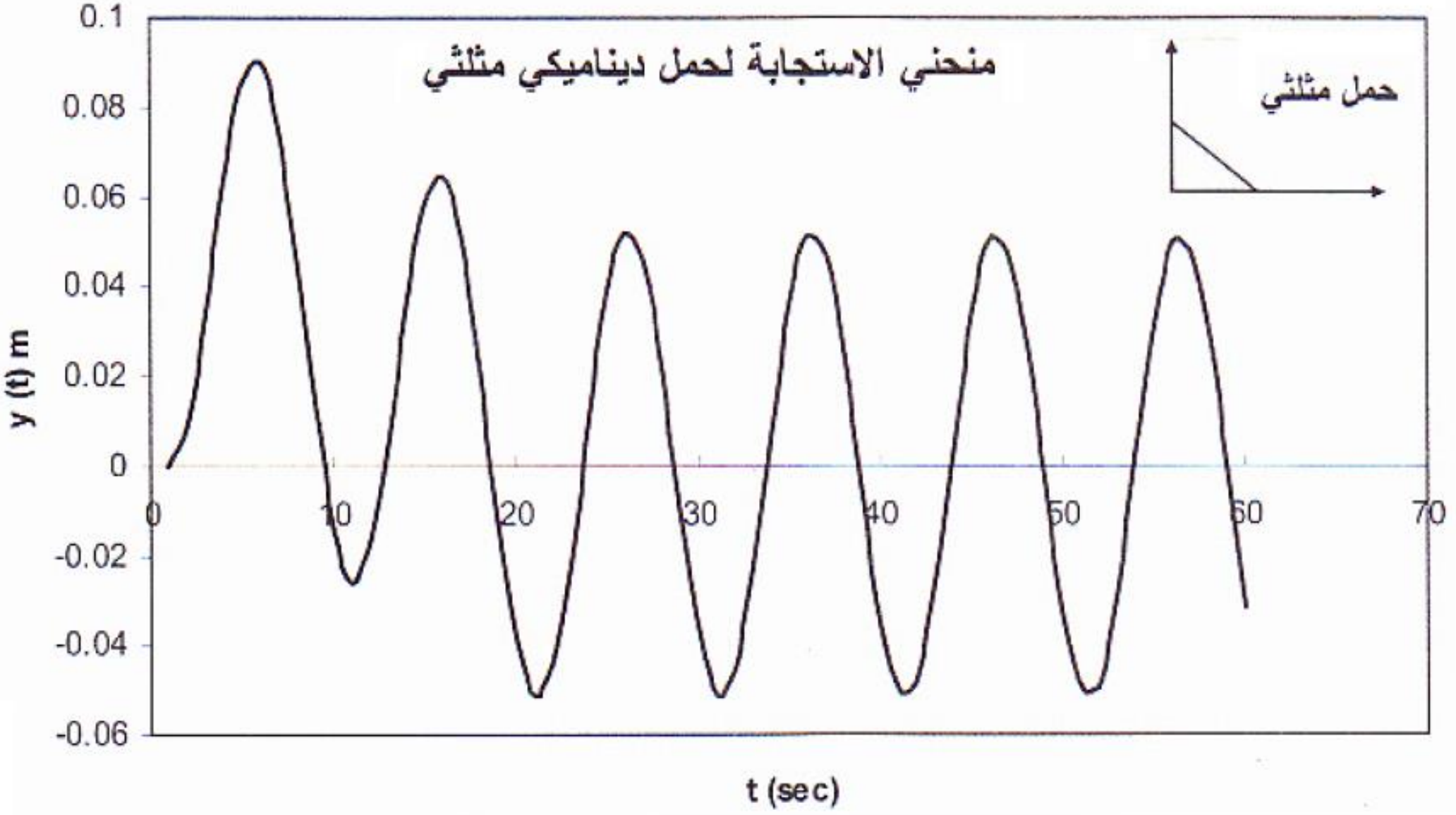
$$DLF = \frac{1}{2\pi\, t_d/T}\left[\sin 2\pi\frac{t}{T} - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T}\right)\right] - \cos 2\pi\frac{t}{T}$$

يمكن رسم منحني استجابة منشأ ما ذي صلابة معينة، يخضع لحمل ديناميكي مثلثـــي باعتبار كل من العلاقتين

$$y = y_{st}\left[\frac{\sin\omega\, t - \sin\omega(t - t_d)}{\omega \cdot t_d} - \cos\omega\, t\right]$$

$$y(t) = y_{St}\left[(1 - \cos\omega\, t) + \frac{1}{t_d}\left(\frac{\sin\omega\, t}{\omega} - t\right)\right]$$

كما هو موضح في الشكل


منحني الاستجابة لحمل ديناميكي مثلثي
حمل مثلثي
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
y (t) m
0
10
20
30
40
50
60
70
t (sec)

وكما وجدنا سابقاً، يمكن الاستفادة من عامل الحمل الديناميكي لحساب قيمة y_{max}، حيث يتم اشتقاق تابع DLF وجعل المشتق يساوي الصفر لتحديد قيمة الزمن t الذي يكون عنده $(DLF)_{max}$ ومن ثم تحدد y_{max} حيث: $DLF = y_{max} / y_{st}$، أو يمكن رسم

منحني العلاقتين

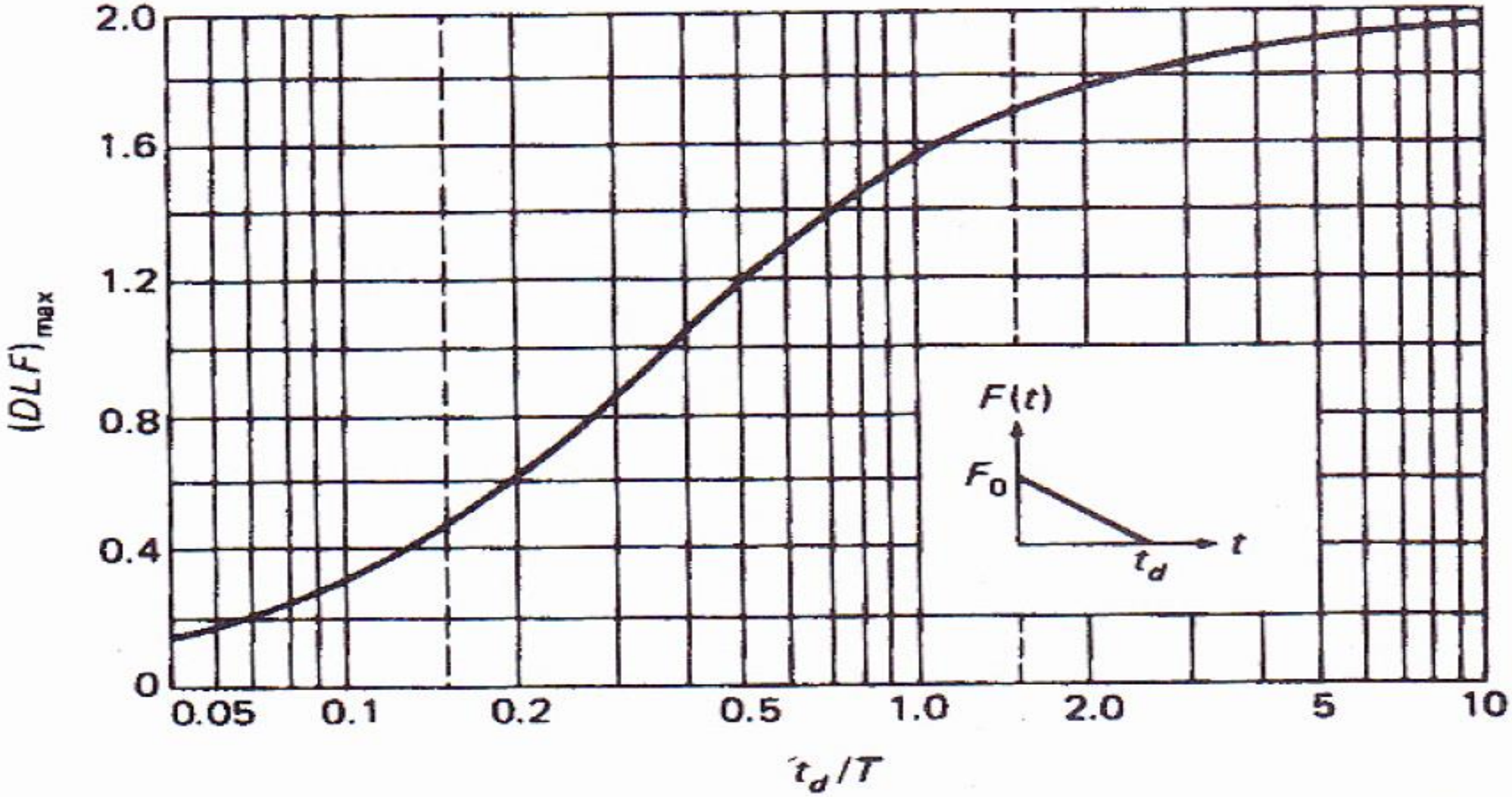
$$DLF = (1 - \cos \omega t) + \frac{1}{t_d}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t\right)$$

$$DLF = \frac{\sin \omega t - \sin \omega (t - t_d)}{\omega \cdot t_d} - \cos \omega t$$

لتحديد $(DLF)_{max}$

كما في الشكل

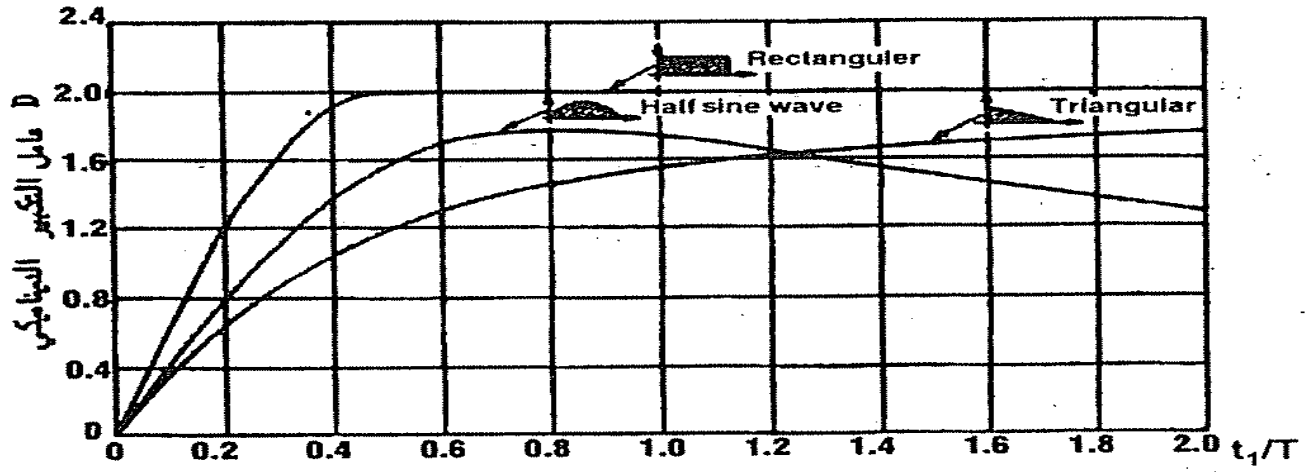
عامل الحمل الديناميكي الأعظمي DLF لمنشأ SDOF بتأثير حمل مثلثي بدون تخامد



إذا كانت $t_1 \geq 0.4T$ فإن القيمة العظمى للاستجابة تحدث في المرحلة الأولى. أما إذا كانت $t_1 < 0.4T$ فإن القيمة العظمى تحدث في مرحلة الاهتزاز الحر كما أنه يمكن إيجاد القيمة العظمى للاستجابة باشتقاق معادلة الحركة ومساواتها بالصفر وبالتالي إيجاد الزمن الموافق للقيمة العظمى كما ورد في الفقرتين السابقتين. ويبين الجدول التالي عامل التكبير الديناميكي كتابع للنسبة (t_1 / T).

t_1 / T	0.20	0.40	0.50	0.75	1.00	1.5	2.00
D	0.6	1.05	1.19	1.38	1.53	1.68	1.76

يتضح من حالات التحميل النبضي السابقة أن القيمة العظمى للاستجابة تعتمد على نسبة فترة النبضية إلى الدور الطبيعي للجملة (t_1 / T)، لذا فإن الشكل (6-6) يبين عامل التكبير الديناميكي (D) بدلالة النسبة (t_1 / T) من أجل حالات الحمولة النبضية الثلاثة السابقة وتُدعى المنحنيات المبينة في الشكل (6-6) بطيوف الاستجابة.



حل معادلة الاستجابة (تكامل دوهامل) بالطرق العددية
applying numerical integration for solving Duhamel's integral

في العلاقة

$$y(t) = y_0 \cos\omega\, t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\, t + \frac{1}{m\cdot\omega}\int_0^t F(\tau)\cdot\sin(\omega(t-\tau))d\tau$$

وفي حال شروط ابتدائية معدومة وجدنا الحلّ في العلاقة

$$y(t) = \frac{1}{m\cdot\omega}\int_0^t F(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau)\cdot d\tau$$

يمكن أن تأخذ معادلة الاستجابة في العلاقة شكلاً آخراً ليسهل حلّها بالطرق العددية ومن ثمّ برمجتها باستخدام الحاسب، وذلك باستخدام العلاقة المثلثية التالية: $\sin\omega(t-\tau) = \sin\omega t.\cos\omega\tau - \cos\omega t.\sin\omega\tau$

$$y(t) = \frac{1}{m\cdot\omega}\left[A(t)\sin\omega\, t - B(t)\cos\omega\, t\right]$$

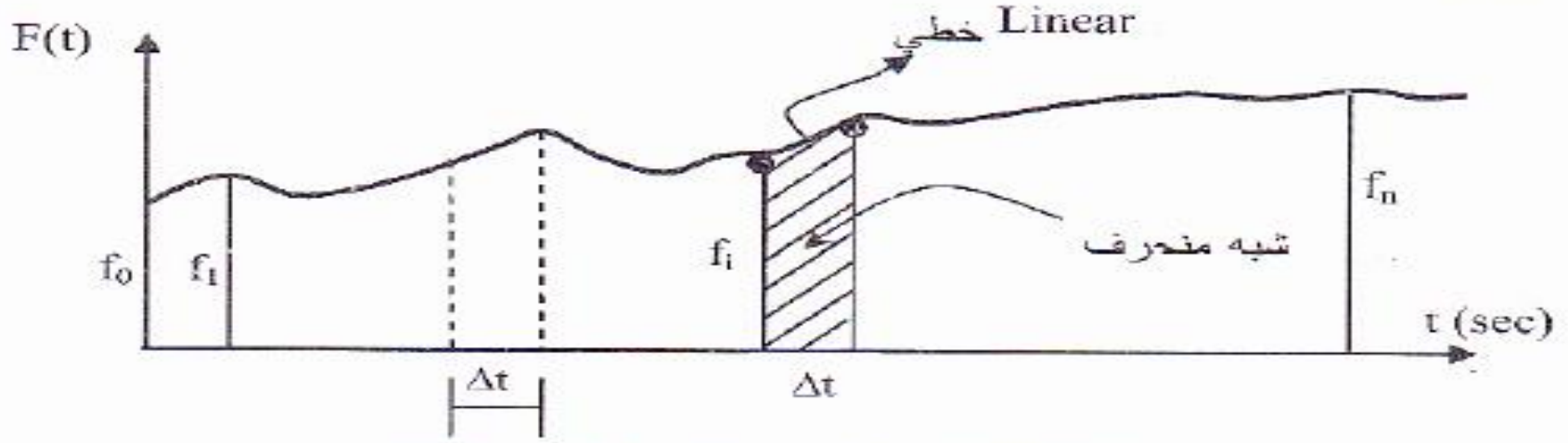
$$A(t) = \int_0^t F(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

$$B(t) = \int_0^t F(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau$$

ولحساب التكاملين في العلاقة ★ يتم اللجوء إلى الطرق العددية حيث نعرض أمثلة عنها:

طريقة الأشباه المنحرفة Trapezoidal Rule Method

يتم تقسيم تابع التحريض إلى قطع مستقيمة، ويتم استخدام طريقة الأشباه المنحرفة لتقييم التكاملات، من الشكل (5-20) يمكن كتابة التكامل A(t) كما هو موضح في العلاقة (5-26).



الشكل (5-20): طريقة الأشباه المنحرفة لتقييم التكاملات.

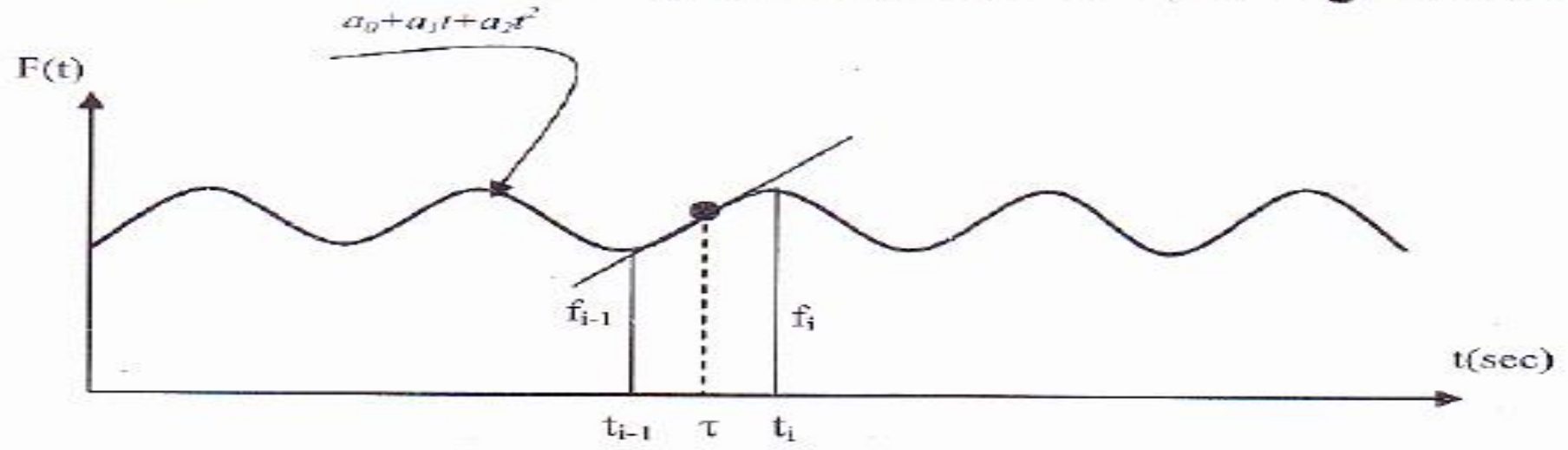
$$A(t) = \frac{\Delta t}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n] \qquad (26\text{-}5)$$

حيث : $n = \frac{t}{\Delta t}$; A(t) معرفة في العلاقة (5-25) في حال عدم وجود تخامد.

$$\int u.\dot{v} = u.\dot{v} - \dot{u}.v + \int \ddot{u}.v dt$$

طريقة سمبسون :Simpson's Rule

بالاعتماد على الشكل (5-21) يمكن اعتبار المنحني المعبر عن الحمل المطبق ذي الشكل المعقد بأنه عدد من القطع المنحنية المتصلة وكل قطعة لها معادلة كثير حدود أو قطع مكافئ معطاة على سبيل المثال في العلاقة $a_0+a_1t+a_2t^2$:



الشكل (5-21): طريقة سمبسون لتقييم التكاملات.

و يعطى التكامل بالعلاقة التالية:

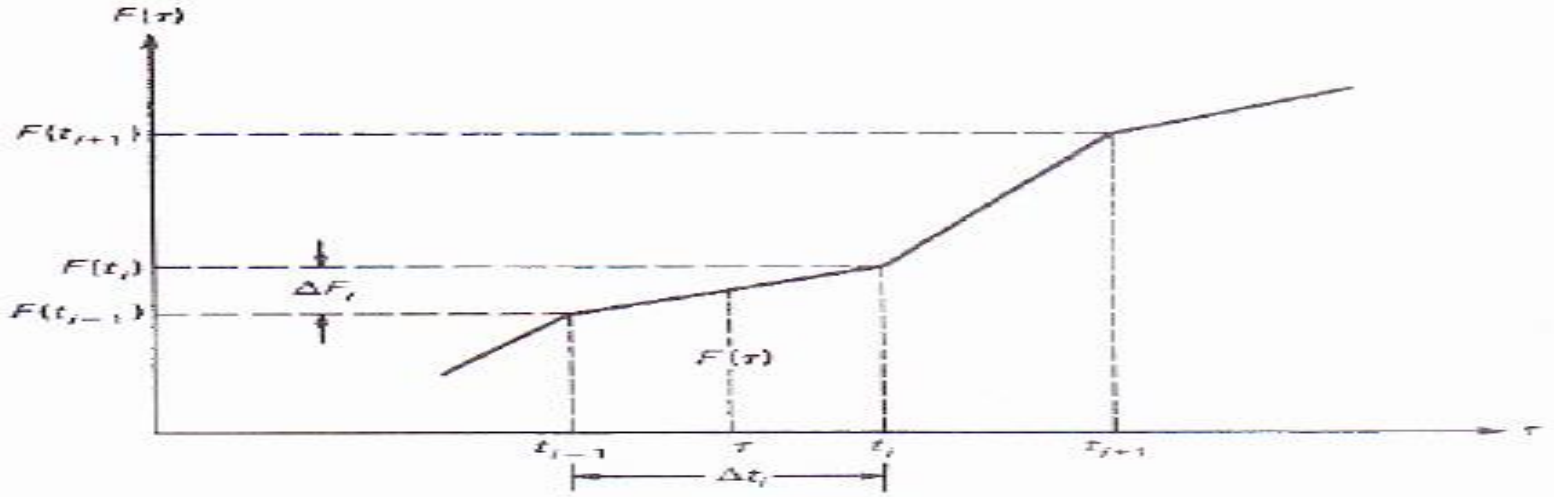
$$A(t) = \frac{\Delta t}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] \qquad (27\text{-}5)$$

حيث: $n = \frac{t}{\Delta t}$، عدد زوجي.

طريقة القوة الخطية :Linear Force Method

كما ذكرنا في حالة الأحمال العامة والتي يكون لها شكل معقد نلجأ إلى استخدام الطرق العددية، وفي طريقة القوة الخطية يتم اعتبار القوة $F(\tau)$ متغيرة بشكل خطي خلال فاصل زمني Δt_i، بالاعتماد على الشكل (22-5) تكتب قيمة $F(\tau)$ كما يلي:

$$F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{\Delta t_i}(\tau - t_{i-1}) \qquad (28\text{-}5)$$



الشكل (22-5): تابع التحريض المقسم إلى أجزاء مستقيمة.

نجد في هذه الحالة أن التابع $F(\tau)$ أصبح تابعاً خطياً ويمكن حساب تكامل هذا التابع بسهولة خلال هذا الفاصل الزمني Δt_i، والآن العلاقات (25-5) يمكن اعتبارها بالشكل التالي خلال فاصل زمني معين Δt_i:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\sin\omega\tau \, d\tau \qquad (29\text{-}5)$$

$$F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{\Delta t_i}(\tau - t_{i-1})$$

بتعويض $F(\tau) = F(t_{i-1}) + \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{\Delta t_i}(\tau - t_{i-1})$ في العلاقة $A(t_i) = A(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau$ ينتج $A(t_i)$

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \frac{1}{\omega}\left[F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right](\sin\omega t_i - \sin\omega t_{i-1}) + \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i}\left[\cos\omega t_i - \cos\omega t_{i-1} + \omega(t_i \sin\omega t_i - t_{i-1}\sin\omega t_{i-1})\right]$$

بالطريقة نفسها نحصل على $B(t_i)$:

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \frac{1}{\omega}\left[F(t_{i-1}) - t_{i-1}\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i}\right](\cos\omega t_{i-1} - \cos\omega t_i) + \frac{\Delta F_i}{\omega^2 \Delta t_i}\left[\sin\omega t_i - \sin\omega t_{i-1} - \omega(t_i \cos\omega t_i - t_{i-1}\cos\omega t_{i-1})\right]$$

حيث إن: $\Delta F_i = F(t_i) - F(t_{i-1})$ و $\Delta t = t_i - t_{i-1}$

الأحمال النبضية

تجدر الاشارة هنا الى أنه عندما تكون مدة التحميل t أقل من T/4 عندها تكون الاستجابة (تقريباً) مستقلة عن شكل التحميل وتتعلق فقط بمساحة التحميل (الدفع).

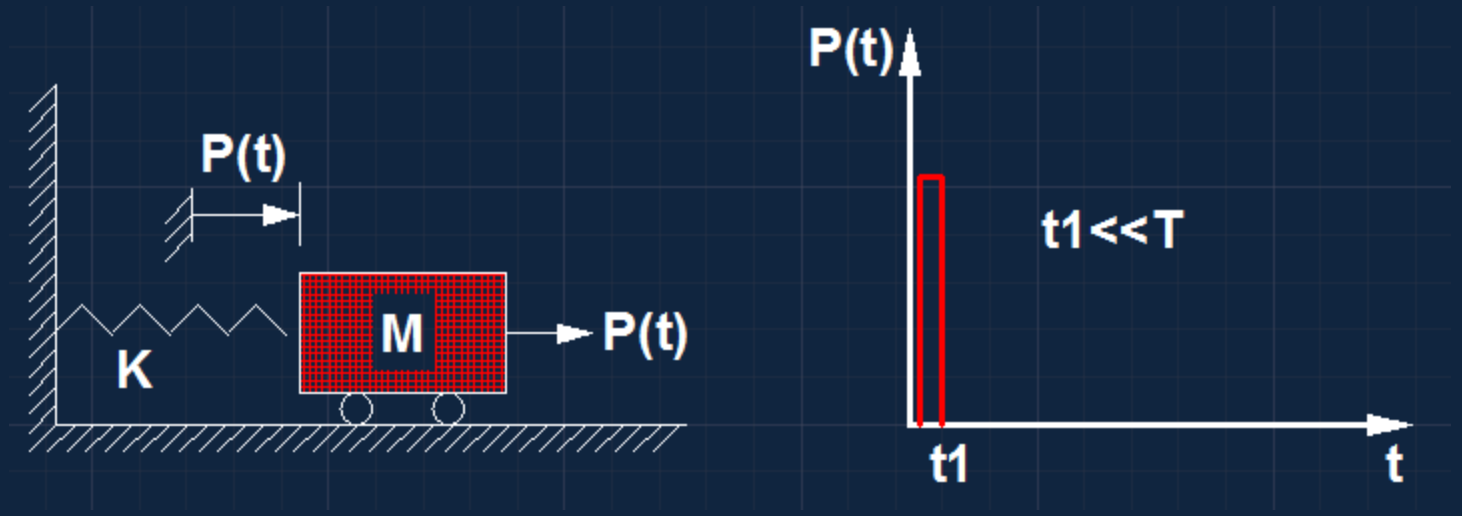
"A very large force that acts for a very short time but with a time integral that is finite is called an impulsive force."

[Chopra, Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering, 1995]

الأحمال النبضية قصيرة الأمد

ليكن لدينا جملة وحيدة درجة الحرية غير مخمدة، معرضة لنبضة قصيرة الأمد $t_1<<T$، تكتب معادلة الحركة كما يلي:

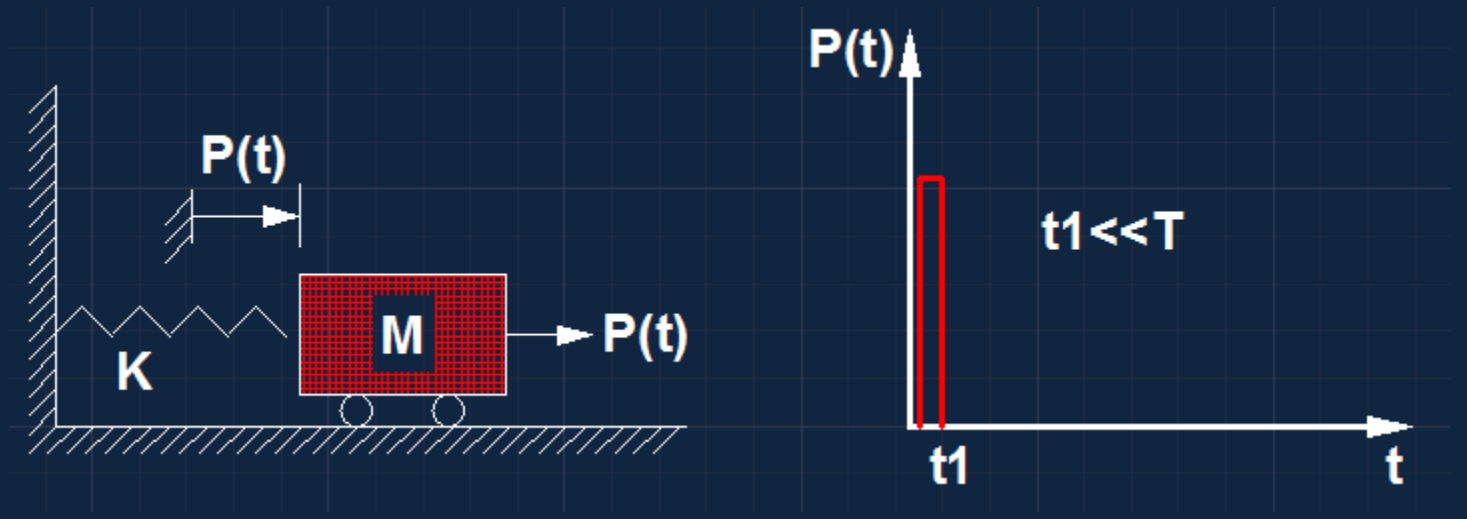
$$M\ddot{u} + K\,u = P(t) \qquad t_1 \geq t \geq 0$$



الأحمال النبضية قصيرة الأمد

ليكن لدينا جملة وحيدة درجة الحرية غير مخمدة، معرضة لنبضة قصيرة الأمد $t_1<<T$، تكتب معادلة الحركة كما يلي:

$$M\ddot{u} + K\,u = P(t) \qquad t_1 \geq t \geq 0$$



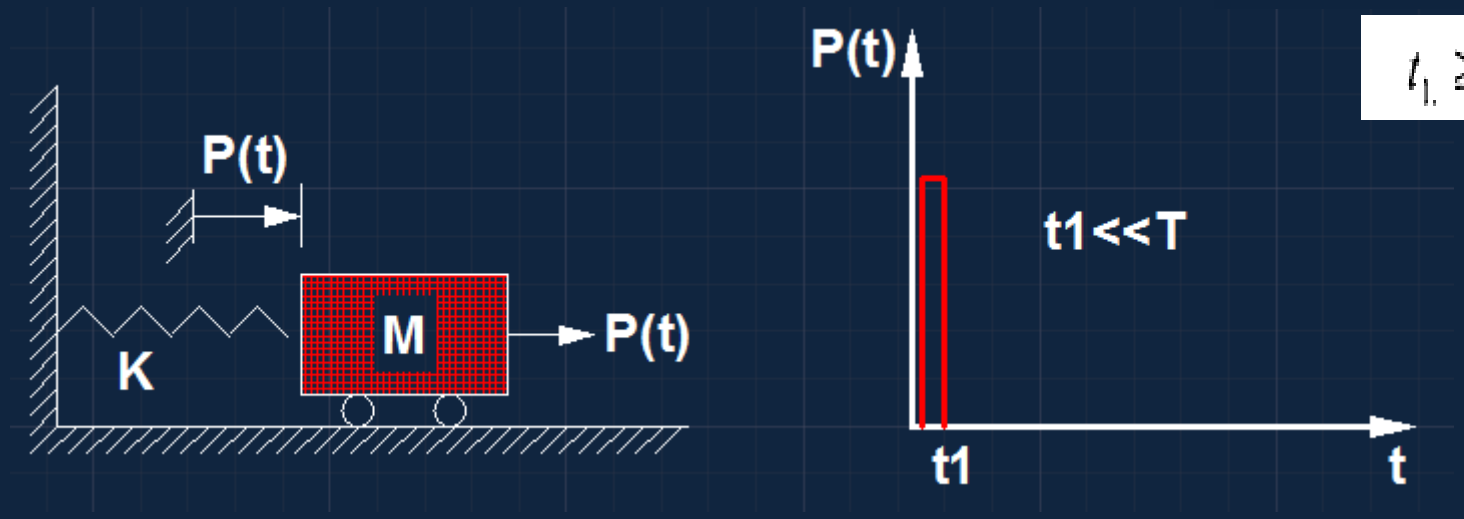
➢ الأحمال النبضية قصيرة الأمد

$$M\ddot{u} + K\,u = P(t) \qquad t_1 \geq t \geq 0$$

$$BCs:\ \ u(0) = \dot{u}(0) = 0$$ بمكاملة االمعادلة ومراعاة الشروط

نحصل على ما يلي $$m\,\dot{u}_1 + k\,u_{avg}\,t_1 = I \qquad where\ \ I = \int_0^{t_1} p(t)\,dt$$

u_{avg} هو متوسط الانتقال في المجال الزمني $0 \geq t \geq t_1$



➢ الأحمال النبضية قصيرة الأمد

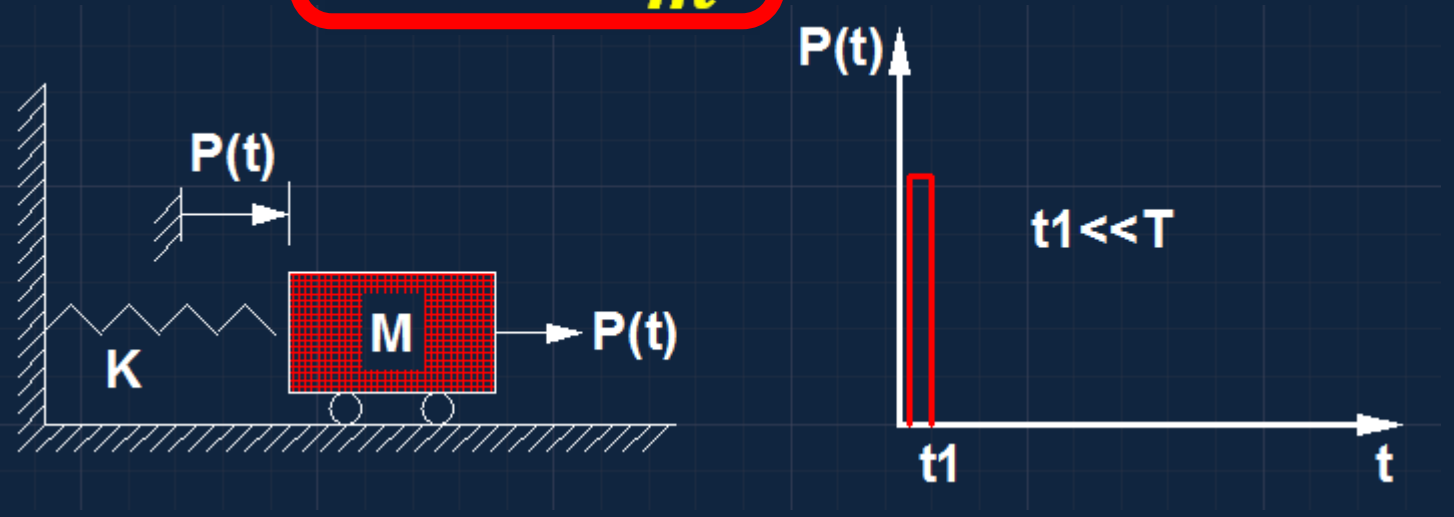
إن u_{avg} كمية صغيرة يمكن إهمالها عندما $t_1 \to 0$ وعندها تكتب المعادلة

$$m\,\dot{u}(0^+) = I$$

وبالتالي فإن نبضة مؤلفة من قوة كبيرة تعمل خلال فترة قصيرة جداً تكافئ إعطاء الجملة سرعة ابتدائية قدرها:

$$\dot{u}(0^+) = \frac{I}{m}$$

Initial Condition for the Free Vibration Term



مقدمة

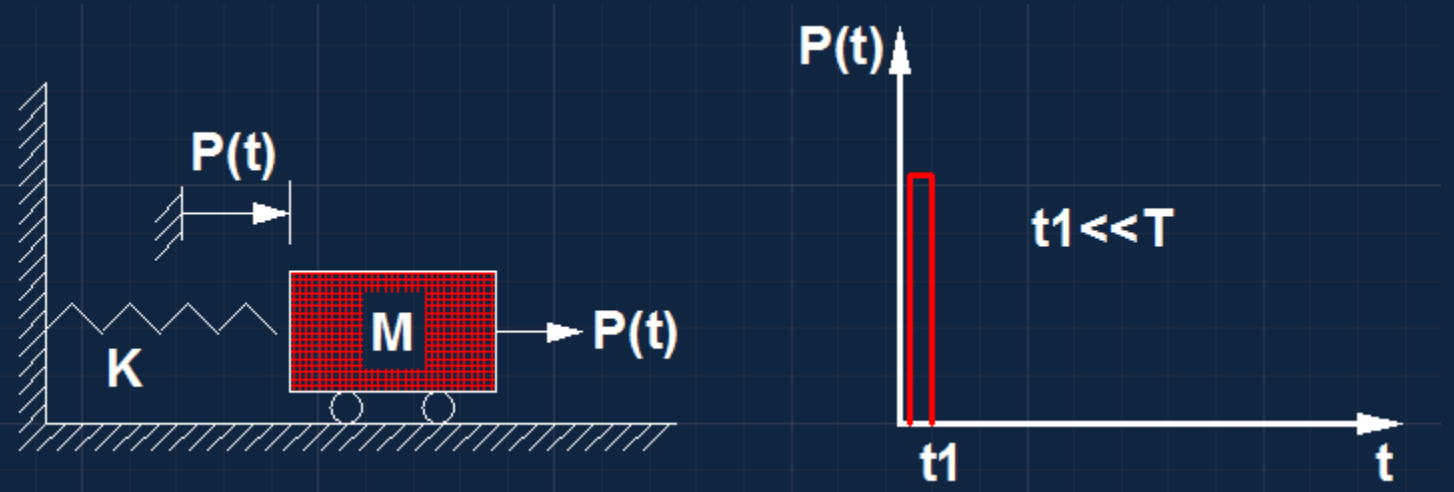
➢ الأحمال النبضية قصيرة الأمد

Vibration Eq. Of the second term:

$$u(t) = u(0^+)cos\,\omega(t - t_1) + \frac{\dot{u}(0^+)}{\omega} sin\omega(t - t_1)$$

where u(0+)=0 and t1≈0 thus:

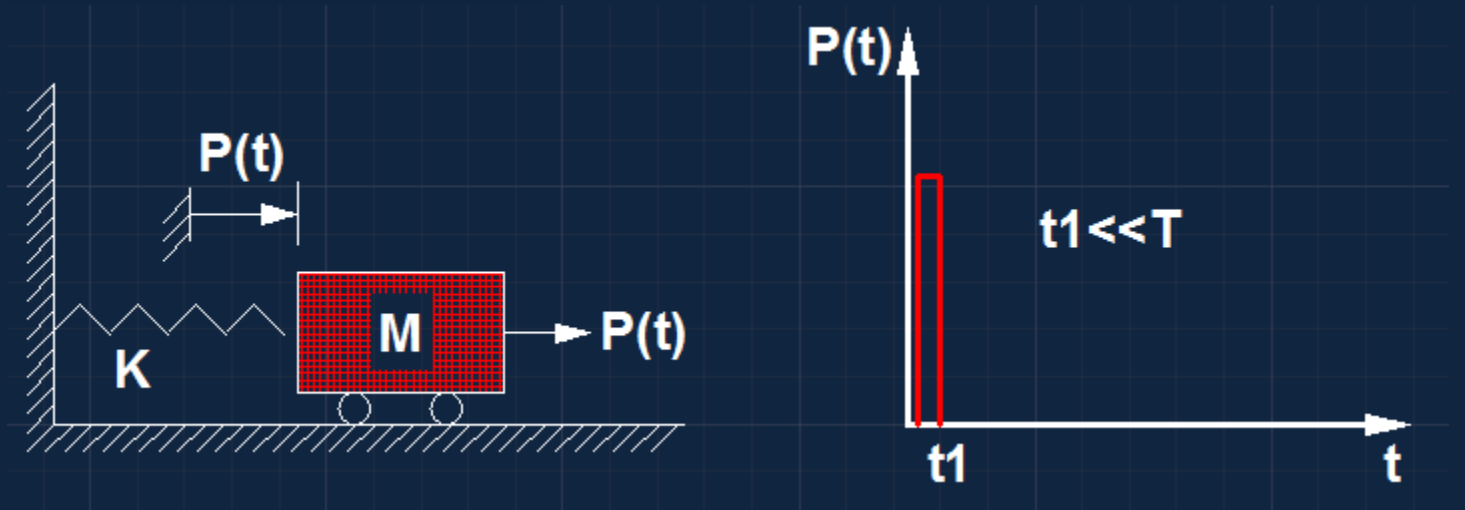
$$u(t) = \frac{I}{m\,\omega} sin\,\omega t$$



مقدمة

- الأحمال النبضية قصيرة الأمد

$$u(t) = \frac{I}{m\,\omega} \sin \omega t$$



الأحمال النبضية قصيرة الأمد

$$u(t) = \frac{I}{m\,\omega} \sin \omega t$$

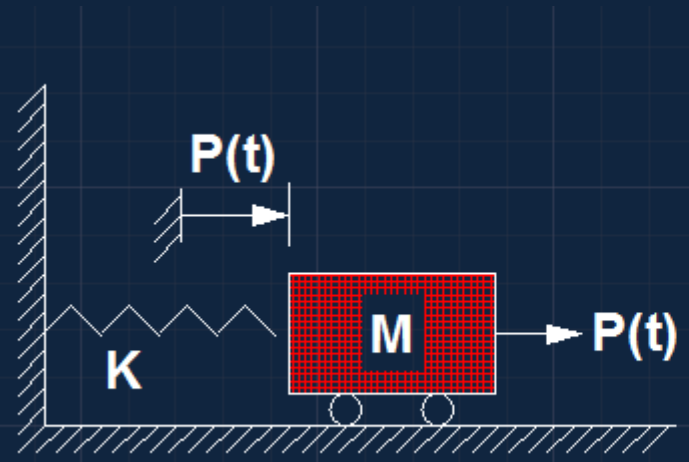
For I = 1 *therefore:* h(t) = u(t) *called*

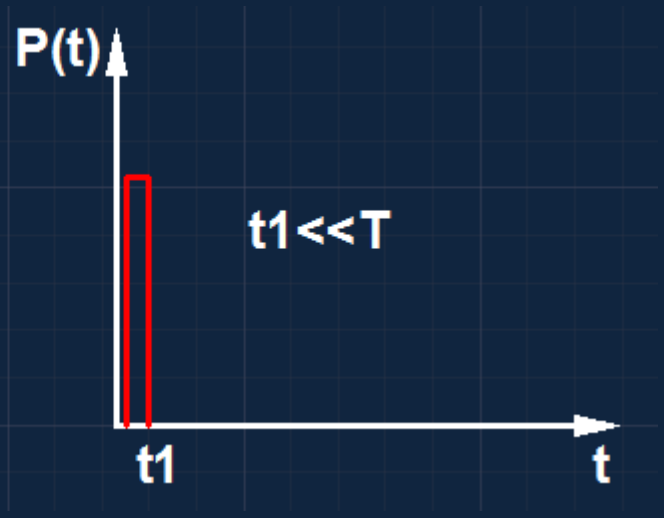
UNIT IMPULSE RESPONSE FUNCTION

وفي حال كون الجملة مخمدة بشكل لزج فإن العلاقة تصبح:

$$u(t) = \left(\frac{I}{m\,\omega_d}\right) e^{-\zeta\,\omega\,t} \sin \omega_d\, t$$

عندما $I = 1$ فإن التابع $h(t) = u(t)$ يسمى تابع الاستجابة من أجل واحدة الدفع.





4.10 تأثير شكل الهزة والتحليل التقريبي على النبضات القصيرة

تم رسم طيف الهزة من أجل النبضات الثلاث (المستطيلة والجيبية نصف الدورة والمثلثية) والتي لكل منها القيمة الأعظمية p0 في الشكل 4.10.1 . :

- إذا كانت مدة النبضة td أطول من Tn/2 فإن التشوه الاعظمي الكلي يحدث خلال النبضة . بعدها فإن شكل النبضة يكون هام جداً.
- من أجل قيم أكبر لـ td/Tn فإن التشوه الاعظمي الكلي هذا يتأثر بسرعة التحميل .
- إن النبضة المستطيلة التي تزداد فيها القوة بشكل فجائي من الصفر وحتى p0 تنتج التشوه الاكبر .
- إن النبضة المثلثية التي يكون فيها تزايد القوة ببطء خلال ثلاث نبضات تنتج التشوه الأصغري .
- النبضة الجيبية نصف الدورة التي تزداد فيها القوة بنسبة متوسطة تسبب تشوهات تكون من أجل العديد من قيم td/Tnأكبر من الاستجابة للنبضة المثلثية .
- إذا كانت مدة البضة tdأقل من Tn/2 فإن الاستجابة الأعظمية الكلية للجملة تحدث خلا ل صفحة الاهتزاز الحر ويتم التحكم بها بالتكامل الزمني للنبضة . يمكن توضيح ذلك باعتبار الحالة الحدية td/Tn تقترب من الصفر . عندما تصبح مدة النبضة صغيرة بشكل كبير مقارنة بالدور الطبيعي للجملة تصبح مقدار نبضي صافي .

$$\mathcal{I} = \int_0^{t_d} p(t)\, dt$$

إن استجابة الجملة لهذه القوة النبضية هي استجابة نبضية واحدية من المعادلة (4.1.6) مضروبة بـI

$$u(t) = \mathcal{I}\left(\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

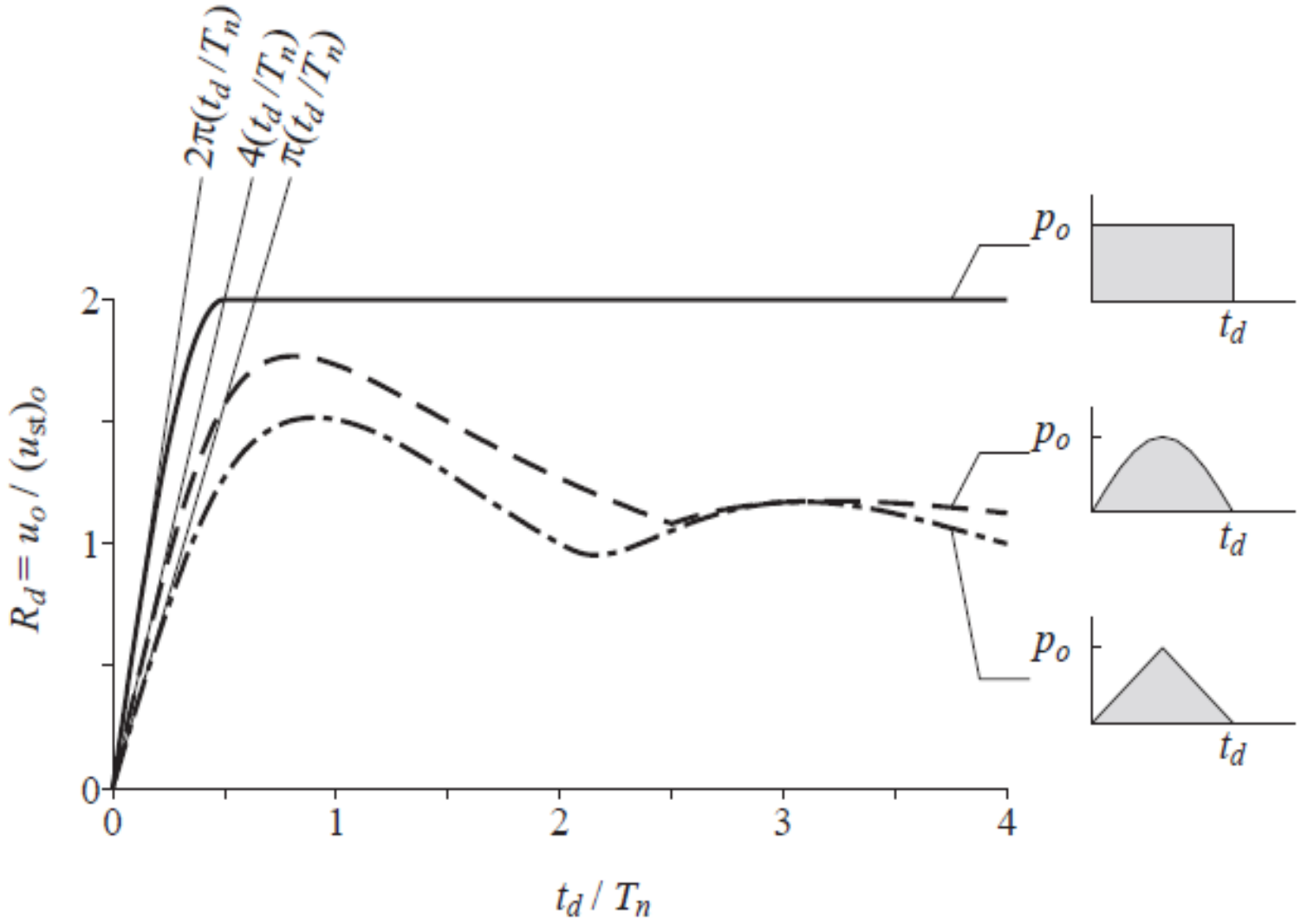


Figure 4.10.1 Shock spectra for three force pulses of equal amplitude.

$$u_o = \frac{\mathcal{I}}{m\omega_n} = \frac{\mathcal{I}}{k}\frac{2\pi}{T_n}$$

is proportional to the magnitude of the impulse.

Thus the maximum deformation due to the rectangular impulse of magnitude $\mathcal{I} = p_o t_d$ is

$$\frac{u_o}{(u_{st})_o} = 2\pi \frac{t_d}{T_n} \tag{4.10.4}$$

that due to the half-cycle sine pulse with $\mathcal{I} = (2/\pi)\, p_o t_d$ is

$$\frac{u_o}{(u_{st})_o} = 4\frac{t_d}{T_n} \tag{4.10.5}$$

and that due to the triangular pulse of magnitude $\mathcal{I} = p_o t_d/2$ is

$$\frac{u_o}{(u_{st})_o} = \pi \frac{t_d}{T_n} \tag{4.10.6}$$

مثال

Example 4.2

The 80-ft-high full water tank of Example 2.7 is subjected to the force $p(t)$ shown in Fig. E4.2, caused by an aboveground explosion. Determine the maximum base shear and bending moment at the base of the tower supporting the tank.

Solution For this water tank, from Example 2.7, weight $w = 100.03$ kips, $k = 8.2$ kips/in. $T_n = 1.12$ sec, and $\zeta = 1.23\%$. The ratio $t_d/T_n = 0.08/1.12 = 0.071$. Because $t_d/T_n < 0.25$, the forcing function may be treated as a pure impulse of magnitude

$$\mathcal{I} = \int_0^{0.08} p(t)\,dt = \frac{0.02}{2}[0 + 2(40) + 2(16) + 2(4) + 0] = 1.2 \text{ kip-sec}$$

where the integral is calculated by the trapezoidal rule. Neglecting the effect of damping, the maximum displacement is

$$u_o = \frac{\mathcal{I}}{k}\frac{2\pi}{T_n} = \frac{(1.2)2\pi}{(8.2)(1.12)} = 0.821 \text{ in.}$$

The equivalent static force f_{So} associated with this displacement is [from Eq. (1.8.1)]

$$f_{So} = ku_o = (8.2)0.821 = 6.73 \text{ kips}$$

The resulting shearing forces and bending moments over the height of the tower are shown in Fig. E4.2. The base shear and moment are $V_b = 6.73$ kips and $M_b = 538$ kip-ft.